目　　錄

第五章　複變理論　167

第六章　傅立葉級數及積分　215

第七章　複數反變換公式　249

第八章　在邊界值問題方面的應用　271

附錄A　拉卜拉士變換的一般性質表　301

第一章

拉卜拉士變換

1·1 拉卜拉士變換之定義

令$F(t)$爲一對$t>0$所定義的函數，則$F(t)$的拉卜拉士變換（Lapiace transform，以下簡稱"拉氏變換"）可寫成$\mathcal{L}\{F(t)\}$，其定義如下

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \tag{1}$$

在上式中，我們暫時限定參數s爲實數。往後的討論中，我們會發現如果把s值延伸至複數，相當有用。

若(1)式對某些特定的s值會收斂（converges），則我們稱$F(t)$的拉氏轉換存在（Exist），否則，即稱不存在。拉氏變換存在的充分條件，請參見第2頁。

1·2 記號表示法

如果我們以大寫字母來表示t的函數，如$F(t)$，$G(t)$，$Y(t)$等，則其對應的拉氏變換式，我們以相對的小寫字母表示，即$f(s)$，$g(s)$，$y(s)$等。此外，"～"（Tilde）亦可用來表示拉氏變換，如$u(t)$的拉氏變換即可寫爲$\tilde{u}(s)$。

1·3 一些基本函數的拉氏變換

下表爲部份基本函數的拉氏變換，均可由(1)式計算求得，請參考第1及第2題。在附錄B中，有更詳細的拉氏變換表。

	$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$　$s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$　$s > 0$
3.	t^n $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$　$s > 0$ 註：n階乘$= n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ 且由定義，$0! = 1$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$　$s > a$
5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$　$s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$　$s > 0$
7.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$　$s > \|a\|$
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$　$s > \|a\|$

1·4　分段連續性

函數$F(t)$在$\alpha \leq t \leq \beta$有定義，且區間$\alpha \leq t \leq \beta$可分割為有限個子區間，若$F(t)$在這些子區間中均為連續，且其左右端點的極限值均是有限值，則我們稱函數$F(t)$在區間$\alpha \leq t \leq \beta$為分段連續（Sectionally continuous or piecewise continuous）。

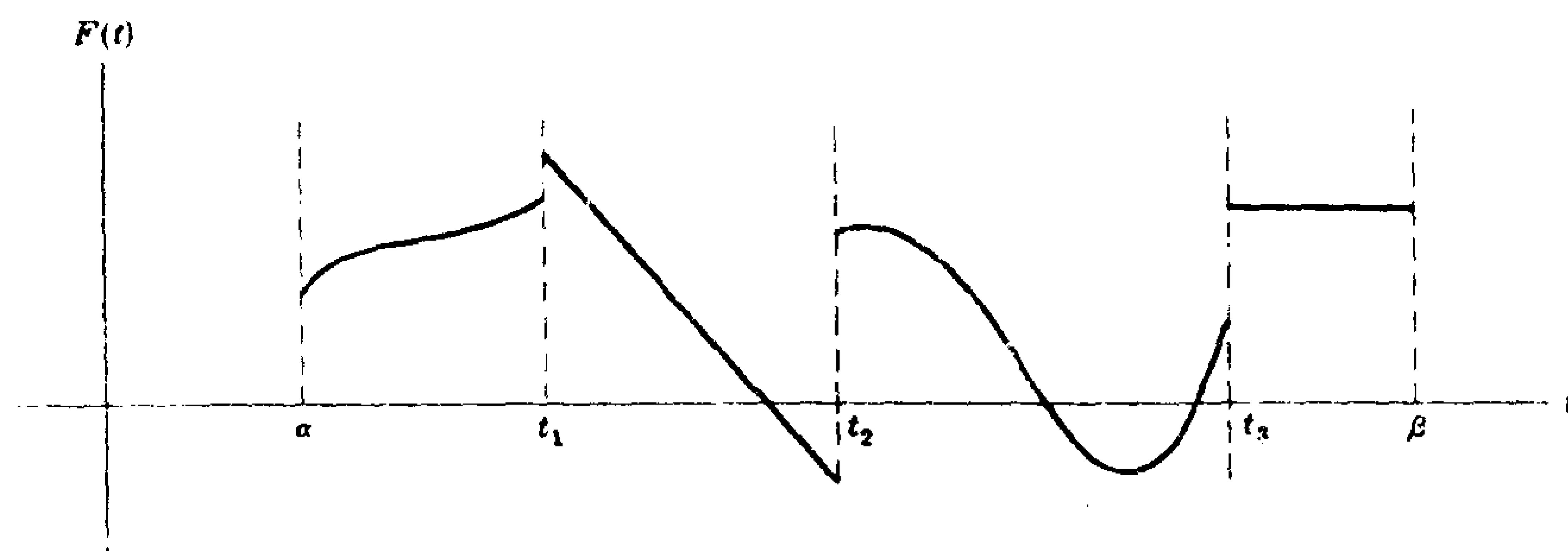


圖 1-1

上面的圖1-1，即為分段連續函數的一個例子。此函數在t_1，t_2，t_3均不連續，以t_2而言，其左右端點的極限值分別是$\lim_{\epsilon\to 0} F(t_2-\epsilon)=F(t_2-0)=F(t_2-)$及$\lim_{\epsilon\to 0} F(t_2+\epsilon)=F(t_2+0)=F(t_2+)$，其中$\epsilon$為正數。

1·5　指數級函數

若存在一實常數$M>0$及一數γ，使得對於所有$t>N$時，有

$$|e^{-\gamma t}F(t)|<M \quad 或 \quad |F(t)|<Me^{\gamma t}$$

則我們稱“**在$t\to\infty$時，$F(t)$為γ指數級函數**（Function of exponential order γ as $t\to\infty$）”，或簡單地說，$F(t)$是**指數級**（Exponential order）。

例題 1.1

$F(t)=t^2$為3指數級（舉例而言），因為對所有$t>0$，$|t^2|=t^2<e^{3t}$。

例題 1.2

$F(t)=e^{t^3}$不是指數級函數，因為我們可經由t之增大，而使得$|e^{-\gamma t}e^{t^3}|=e^{t^3-\gamma t}$大於任一給定之正數。

直覺上來看，當t增大時，指數級函數絕對值的增大速度不會比$Me^{\gamma t}$來得快，但這在實際狀況並不會造成任何限制，因M和γ的大小可任意選定。

有界函數，如$\sin at$或$\cos at$，均為指數級函數。

1·6　拉氏變換存在的充分條件

定理 1-1：若$F(t)$在每個有限區$0\le t\le N$均是分段連續，且在$t>N$時，$F(t)$為γ指數級，則對於所有$s>\gamma$，其拉氏變換$f(s)$存在。

此定理之證明請參見47題。但必須強調的是，以上只是拉氏變換存在的**充分**條件，若不符合上述條件，則拉氏變換可能存在，也可能不存在（請參見32題）。故上述條件並非拉氏變換存在的**必要**條件。

其他充分條件，請參見145題。

1·7　拉氏變換的一些重要性質

在以下的定理中，假設所有函數均滿足定理1-1的條件（除非另有說明），故所有函數的拉氏變換均存在。

1. 線性性質

定理 1-2： 若c_1，c_2爲任意常數，且$F_1(s)$，$F_2(s)$分別是$F_1(t)$，$F_2(t)$之拉氏變換，則

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\}+c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s)+c_2f_2(s) \quad (2)$$

此結論可輕易地推廣至兩個函數以上。

例題 1.3

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\}-3\mathcal{L}\{\cos 2t\}+5\mathcal{L}\{e^{-t}\}\\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right)-3\left(\frac{s}{s^2+4}\right)+5\left(\frac{1}{s+1}\right)\\ &= \frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}\end{aligned}$$

將$F(t)$變換成$f(s)$的符號$\mathcal{L}$，又稱爲“拉氏變換運算子”（Laplace transformation operator）。由於$\mathcal{L}$滿足上述定理，所以我們又稱之爲**線性運算子**（Linear operator），或是說它具有**線性性質**（Linearity property）。

2. 第一平移性質

定理 1-3： 若$\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，則

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a) \quad (3)$$

例題 1.4

因$\mathcal{L}\{\cos 2t\}=\dfrac{s}{s^2+4}$，故

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

3. 第二平移性質

定理 1-4： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，且 $G(t)=\begin{cases}F(t-a) & t>a\\ 0 & t<a\end{cases}$，則

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s) \quad (4)$$

例題 1.5：

因 $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$ ，故函數

$$G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

的拉氏變換 $6e^{-2s}/s^4$ 。

4. 標度改變性質

定理 1.5：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \tag{5}$$

例題 1.6：

因 $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ ，故

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

5. 導式之拉氏轉換

定理 1.6：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ 則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0) \tag{6}$$

但上述定理之成立需滿足下列條件：第一 $F(t)$ 在 $0 \le t \le N$ 之間為連續，且在 $t > N$ 時，$F(t)$ 爲指數級。第二，$F'(t)$ 在 $0 \le t \le N$ 之間爲分段連續。

例題 1.7：

若 $F(t) = \cos 3t$ ，則 $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s}{s^2+9}$ 故

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3\sin 3t\} = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

此方法在求拉氏轉換式時可免去積分麻煩。（參見15題）

定理 1.7：在定理 1.6 中，若 $F(t)$ 在 $t = 0$ 時不連續，但 $\lim_{t\to 0} F(t) = F(0+)$ 尚存

在（此值不一定等於$F(0)$，因$F(0)$可能不存在），則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0+) \qquad (7)$$

定理 1.8：在定理1.6中，若$F(t)$在$t=a$時不連續，則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a+) - F(a-)\} \qquad (8)$$

其中$F(a+)-F(a-)$的值，我們稱爲在不連續點$t=a$的**躍斷**（Jump）。若有更多不連續點，可依此法一一修正。

定理 1.9：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) \qquad (9)$$

此定理之成立亦需滿足：第一，$F(t)$和$F'(t)$在$0 \leq t \leq N$時均連續，且在$t > N$時均爲指數級，第二，$F''(t)$在$0 \leq t \leq N$時爲分段連續。

若$F(t)$和$F'(t)$有不連續點，可依定理1.7及1.8來修正(9)式。

定理 1.10：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \qquad (10)$$

此定理之成立亦需滿足：第一，$F(t)$，$F'(t)\cdots F^{(n-2)}(t)$在$0 \leq t \leq N$時均連續，且$t > N$時均爲指數級，第二，$F^{(n)}(t)$在$0 \leq t \leq N$時爲分段連續。

6. 積分式之拉氏變換

定理 1.11：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s} \qquad (11)$$

例題 1.8：

因 $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$，我們可直接得到

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 2u\,du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

7. 乘以 t^n

定理 1.12：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \tag{12}$$

例題 1.9：

因爲 $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$ ，故

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

8. 除以 t

定理 1.13：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du \tag{13}$$

在此須先確定 $\lim\limits_{t\to 0} F(t)/t$ 存在。

例題 1.10：

因爲 $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ 且 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ ，所以

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(1/s)$$

9. 週期函數

定理 1.14：若 $F(t)$ 有週期 $T > 0$ 使得 $F(t+T) = F(t)$（見圖 1-2），

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

則

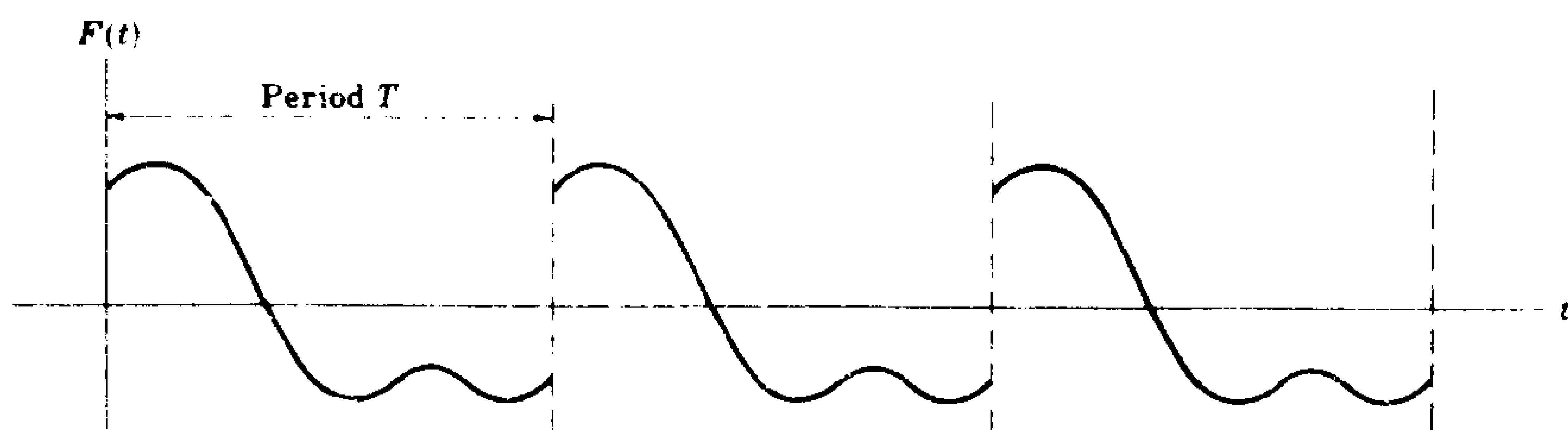


圖 1-2

10. $s\to\infty$ 時，$f(s)$ 之極限値

定理 1.15：若 $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，則

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0 \tag{15}$$

11. 初値定理

定理 1.16：假設以下之極限値均存在，則

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,f(s) \tag{16}$$

12. 終値定理

定理 1.17：若以下之極限値均存在，則

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s) \tag{17}$$

13. 初値定理之推廣

若 $\lim_{t\to 0} F(t)/G(t)=1$，則在 t 値很小時，$F(t)$ 和 $G(t)$ 的値很相近，我們寫成"當 $t\to 0$ 時，$F(t)\sim G(t)$"。

同理，若 $\lim_{s\to\infty} f(s)/g(s)=1$，則在 s 很大時，$f(s)$ 和 $g(s)$ 的値很相近，我們寫成"當 $s\to\infty$ 時，$f(s)\sim g(s)$"。

在此可將定理 1.16 推廣如下

定理 1.18：若當 $t\to 0$ 時，$F(t)\sim G(t)$，則當 $s\to\infty$ 時，$f(s)\sim g(s)$，其中

$f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$，$g(s)=\mathcal{L}\{G(t)\}$。

14. 終值定理之推廣

若 $\lim_{t\to\infty} F(t)/G(t)=1$，我們寫成"當 $t\to\infty$ 時，$F(t)\sim G(t)$"。同理若 $\lim_{s\to 0} f(s)/g(s)=1$，寫成"當 $s\to 0$ 時，$f(s)\sim g(s)$"，由此可得定理1.17的推廣。

1-8 計算拉氏變換的方法

以下之方法均可用於計算拉氏變換

1. **直接計算**：直接由定義(1)計算出。
2. **級數法**：若 $F(t)$ 可化為冪級數展開如下

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{18}$$

則其拉氏變換可由等式右方級數逐項變換，然後相加而得之，故

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!\,a_2}{s^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{s^{n+1}} \tag{19}$$

但此法須保證在 $s>\gamma$（19）式必能收斂時方為有效。參見34，36，39及48題。

3. **微分方程式法**：找到滿足 $F(t)$ 的微分方程式，再使用前述定理即可求得。參見34及48題。
4. **對某參數微分**：參見第20題。
5. **其他方法**：須用到各定理中較特殊的方法。例如定理1.13。
6. **查表法**：（見附錄）。

1-9 積分的計算

若 $f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$，則

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\,dt = f(s) \tag{20}$$

令 $s\to 0$，可得

$$\int_0^\infty F(t)\,dt = f(0) \tag{21}$$

在此假設其積分均爲收斂。

在計算積分時，（20）及（21）式非常有用。見45及46題。

1·10 一些特殊函數

1. 伽瑪函數

若 $n>0$，定義**伽瑪函數**（Gamma function）

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du \tag{22}$$

以下是伽瑪函數的一些重要性質

1. $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n), \quad n>0$$

   因 $\Gamma(1)=1$，故 $\Gamma(2)=1$，$\Gamma(3)=2!=2$，$\Gamma(4)=3!$，推廣得 $\Gamma(n+1)=n!$（n 爲正整數），故此函數又稱**階乘函數**（Factorial function）。

2. $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

3. $$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0<p<1$$

4. n 很大時，

   $$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$$

   上式稱爲**司徒令公式**（Stirling's formula）。註："～"表示"在 n 很大時，約略相等"，更精確地說若 $\lim_{n\to\infty} F(n)/G(n) = 1$，則 $F(n)\sim G(n)$。

5. $n<0$，$\Gamma(n)$ 可定義爲

   $$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

2. 貝色函數

定義 n 階的**貝色函數**（Bessel function of order n）如下

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} \tag{23}$$

其重要性質為

1. $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ ，n 為正整數
2. $J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t}J_n(t) - J_{n-1}(t)$
3. $\frac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$. . 若 $n=0$ ，可得 $J_0'(t) = -J_1(t)$.
4. $e^{\frac{1}{2}t(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)u^n$

   此稱為貝色函數的形成函數（Generating function）
5. $J_n(t)$ 滿足貝色微分方程式（Bessel's differential equation）

$$t^2 Y''(t) + t Y'(t) + (t^2 - n^2) Y(t) = 0$$

可定義 $J_n(it) = i^{-n} I_n(t)$ ，其中 $I_n(t)$ 稱修正的 n 階貝色函數（Modified Bessel function of order n ）。

3. 誤差函數

定義為

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\, du \tag{24}$$

4. 餘誤差函數

定義為

$$\text{erfc}(t) = 1 - \text{erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2} du \tag{25}$$

5. 正弦及餘弦積分

定義為

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du \tag{26}$$

$$\text{Ci}(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\, du \tag{27}$$

6. 指數積分

定義爲

$$\mathrm{Ei}(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \tag{28}$$

7. 單位階梯函數

亦稱爲黑佛塞單位函數（Heaviside's unit function），定義爲

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \tag{29}$$

見圖 1-3 。

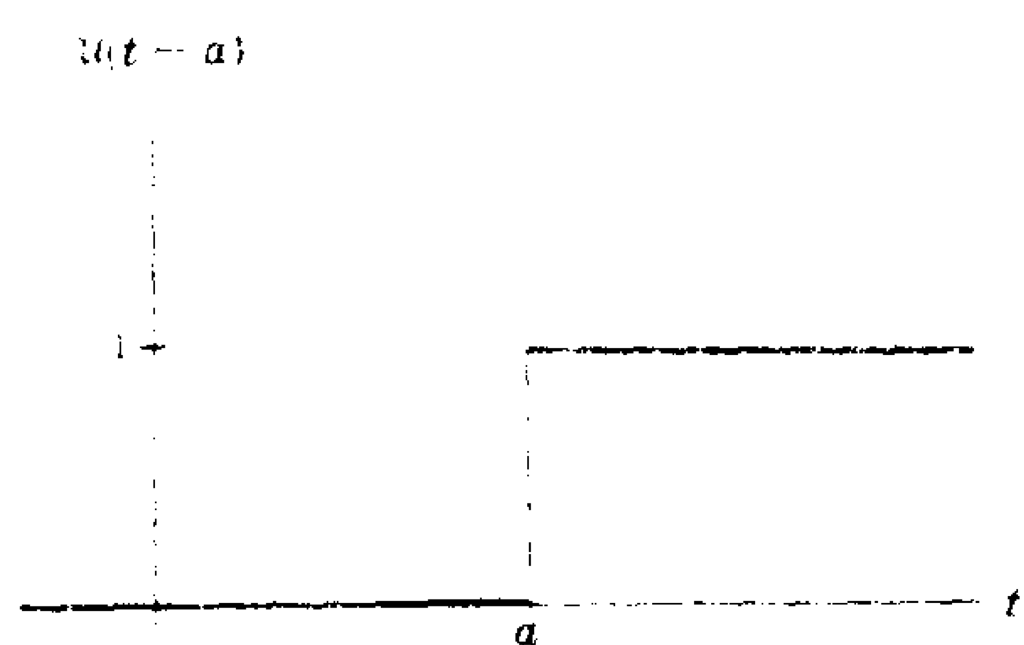


圖 1-3

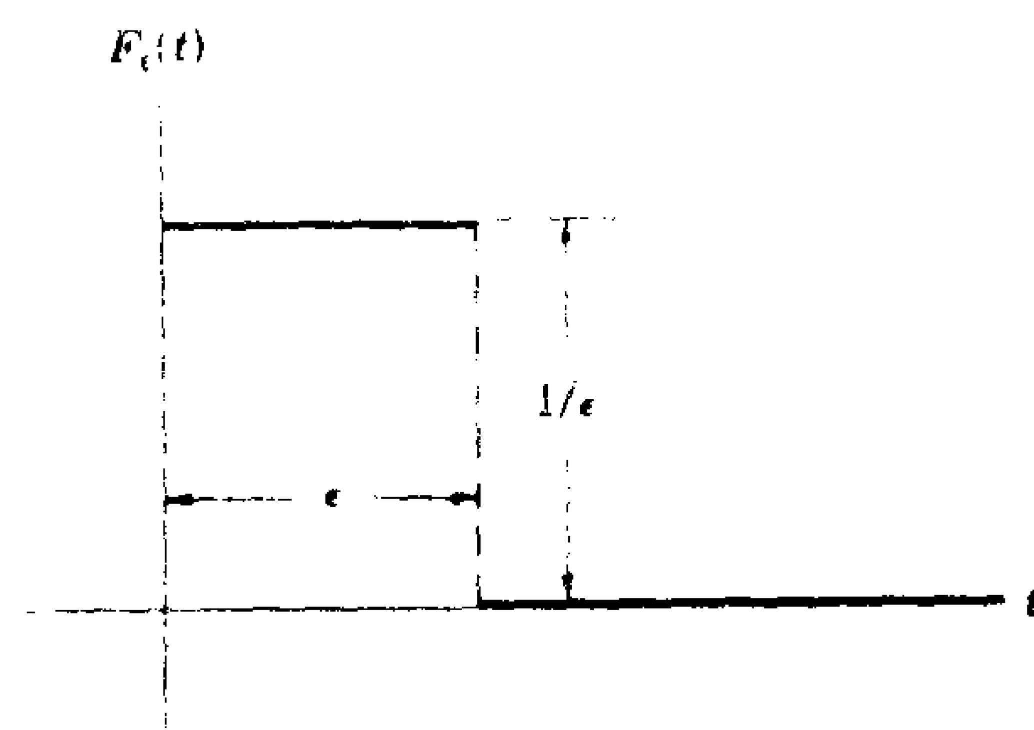


圖 1-4

8. 單位脈衝函數或狄瑞克三角形函數

考慮下列函數

$$F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leqq t \leqq \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases} \tag{30}$$

其中 $\epsilon > 0$ ，其圖形見圖 1-4 。

從圖中可明顯看出，當 $\epsilon \to 0$ 時，圖形的高度增大，寬度減小，但其面積保持爲 1 ，即 $\int_0^{\infty} F_\epsilon(t)\, dt = 1.$

此觀念使得工程師和物理學家想到一個極限情形下的函數，記爲 $\delta(t)$ ，這是在

$\epsilon \to 0$時，由$F_\epsilon(t)$逼近而得的函數。我們稱$\delta(t)$爲單位脈衝函數(Unit impulse function)或狄瑞克三角形函數(Dirac delta function)，其重要性質如下：

1. $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$

2. $\int_0^\infty \delta(t)G(t)\,dt = G(0)$　　其中$G(t)$爲任意之連續函數

3. $\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt = G(a)$　　其中$G(t)$爲任意之連續函數

雖然在數學上來說，這種函數並不存在，然而其運算或操作均可經嚴密之定義而達成。

9. 無積函數

若對於所有$t > 0$

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)\,du = 0 \tag{31}$$

則稱$N(t)$爲無積函數(Null function)

例題 1.11

$$F(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$ 即爲無積函數

一般來說，任何函數若只在某些可數的特定點(即能與自然數1，2，3…一對一相對應的一組點)有不爲零的對應值，且在其他區域均爲零，則這就是一個無積函數。

1・11 特殊函數的拉氏轉換

以下爲某些特殊函數的拉氏轉換。更詳盡的表格可參見附錄B。

特殊函數的拉氏變換表

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
1.	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ 若 $n=0,1,2\cdots$，則此式即為第 1 項的第 3 條
2.	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
3.	$J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$
4.	$\sin\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-1/4s}$
5.	$\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-1/4s}$

特殊函數的拉氏變換表（續前）

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
6.	$\operatorname{erf}(t)$	$\frac{e^{s^2/4}}{s}\operatorname{erfc}(s/2)$
7.	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$
8.	$\operatorname{Si}(t)$	$\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$
9.	$\operatorname{Ci}(t)$	$\frac{\ln(s^2+1)}{2s}$
10.	$\operatorname{Ei}(t)$	$\frac{\ln(s+1)}{s}$
11.	$\mathcal{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
12.	$\delta(t)$	1
13.	$\delta(t-a)$	e^{-as}
14.	$\mathcal{N}(t)$	0

附解題

基本函數的拉氏轉換

1.1 證明：(a) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},\ s>0$; (b) $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\ s>0$; (c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a},\ s>a$.

答 (a)

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\frac{1-e^{-sP}}{s} = \frac{1}{s} \text{ 其中 } s>0$$

(b)

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}(t)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P t\,e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.(t)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - (1)\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-sP}}{s^2}-\frac{Pe^{-sP}}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{s^2} \text{ 其中 } s>0$$

其中我們用到部分積分。

(c)

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at})\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-(s-a)t}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\frac{1-e^{-(s-a)P}}{s-a} = \frac{1}{s-a} \text{ 其中 } s>a$$

不用直接積分的解法，見第15題。

1.2 證明：(a) $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, (b) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ 其中 $s>0$。

答 (a)

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\sin at\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}(-s\sin at - a\cos at)}{s^2+a^2}\right|_0^P$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left\{\frac{a}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sP}(s\sin aP + a\cos aP)}{s^2+a^2}\right\}$$
$$= \frac{a}{s^2+a^2} \text{ 其中 } s>0$$

(b)

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\cos at\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}(-s\cos at + a\sin at)}{s^2+a^2}\right|_0^P$$

$$= \lim_{P\to\infty}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sP}(s\cos aP - a\sin aP)}{s^2+a^2}\right\}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2} \quad 其中 s>0$$

以上引用到下列等式

$$\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} \tag{1}$$

$$\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t + \beta\sin\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} \tag{2}$$

另解：假設第 1 題(c)的結果對複數亦成立（可證明），則

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} \tag{3}$$

但 $e^{iat} = \cos at + i\sin at.$ ，故

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at + i\sin at)$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt + i\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \mathcal{L}\{\cos at\} + i\mathcal{L}\{\sin at\} \tag{4}$$

由(3)及(4)，將實部及虛部分別對應相等，得

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

1.3 證明：(a) $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, (b) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$ 其中 $s>|a|$。

答 (a)

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{-at}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2-a^2} \quad 其中 s>|a|$$

另解：利用拉氏變換的線性性質，可立刻算出答案。

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2-a^2} \quad 其中\ s > |a|$$

(b)如同(a)，

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{s}{s^2-a^2} \quad 其中\ s > |a|$$

1.4　求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$，其中 $F(t) = \begin{cases} 5 & 0<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$

圖　由定義，

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^3 e^{-st}(5)\,dt + \int_3^\infty e^{-st}(0)\,dt$$

$$= 5\int_0^3 e^{-st}\,dt = 5\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^3 = \frac{5(1-e^{-3s})}{s}$$

線性性質

1.5　證明線性性質［定理 1.2］。

圖　令 $\mathcal{L}\{F_1(t)\} = f_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}F_1(t)\,dt$ 且 $\mathcal{L}\{F_2(t)\} = f_2(s) = \int_0^\infty e^{-st}F_2(t)\,dt.$

若 c_1 及 c_2 爲任意常數，則

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\}\,dt \\
&= c_1\int_0^\infty e^{-st}F_1(t)\,dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}F_2(t)\,dt \\
&= c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} \\
&= c_1f_1(s) + c_2f_2(s)
\end{aligned}$$

此結果可輕易推廣之。（見 61 題）

1.6　求 $\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\}$.

圖　由線性性質（第 5 題），可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4e^{5t}+6t^3-3\sin 4t+2\cos 2t\} &= 4\mathcal{L}\{e^{5t}\}+6\mathcal{L}\{t^3\}-3\mathcal{L}\{\sin 4t\}+2\mathcal{L}\{\cos 2t\}\\ &= 4\left(\frac{1}{s-5}\right)+6\left(\frac{3!}{s^4}\right)-3\left(\frac{4}{s^2+16}\right)+2\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\\ &= \frac{4}{s-5}+\frac{36}{s^4}-\frac{12}{s^2+16}+\frac{2s}{s^2+4}\end{aligned}$$

其中 $s>5$。

平移及標度改變性質

1.7　證明平移性質：若 $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，則 $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$.

解　由定義 $\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s)$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}\,dt\\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)\,dt = f(s-a)\end{aligned}$$

1.8　求 (a) $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}$, (b) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 4t\}$, (c) $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\}$, (d) $\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)\}$

解　(a) $\mathcal{L}\{t^2\}=\frac{2!}{s^3}=\frac{2}{s^3}$　故　$\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}=\frac{2}{(s-3)^3}$.

(b) $\mathcal{L}\{\sin 4t\}=\frac{4}{s^2+16}$　故　$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 4t\}=\frac{4}{(s+2)^2+16}=\frac{4}{s^2+4s+20}$.

(c) $\mathcal{L}\{\cosh 5t\}=\frac{s}{s^2-25}$　故　$\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\}=\frac{s-4}{(s-4)^2-25}=\frac{s-4}{s^2-8s-9}$.

另解：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\} &= \mathcal{L}\left\{e^{4t}\left(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{9t}+e^{-t}\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-9}+\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{s-4}{s^2-8s-9}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3\cos 6t-5\sin 6t\} &= 3\mathcal{L}\{\cos 6t\}-5\mathcal{L}\{\sin 6t\}\\ &= 3\left(\frac{s}{s^2+36}\right)-5\left(\frac{6}{s^2+36}\right)=\frac{3s-30}{s^2+36}\end{aligned}$$

故　$\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)\} = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36} = \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$

1.9　證明第二平移性質。

若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ 且 $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$，則 $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$.

圈

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} G(t)\, dt = \int_0^a e^{-st} G(t)\, dt + \int_a^\infty e^{-st} G(t)\, dt \\
&= \int_0^a e^{-st}(0)\, dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} F(u)\, du \\
&= e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du \\
&= e^{-as} f(s)
\end{aligned}$$

其中用到變數代換 $t = u + a$ 。

1.10 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 其中 $F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & t > 2\pi/3 \\ 0 & t < 2\pi/3 \end{cases}$

圈 解 1 ：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{2\pi/3} e^{-st}(0)\, dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t - 2\pi/3)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(u+2\pi/3)} \cos u\, du \\
&= e^{-2\pi s/3} \int_0^\infty e^{-su} \cos u\, du = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}
\end{aligned}$$

解 2 ：因爲 $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$，由第 9 題，代入 $a = \frac{2\pi}{3}$，可得

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$$

1.11 證明標度改變性質：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則 $\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$.

圈

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(at)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(u/a)} F(u)\, d(u/a) \\
&= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-su/a} F(u)\, du \\
&= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

其中用到變數代換 $t = u/a$。

1.12 已知 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}(1/s)$，求 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$.

解 由第11題 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\{1/(s/a)\} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(a/s)$

故 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \tan^{-1}(a/s)$.

導式的拉氏變換

1.13 證明定理1.6：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則 $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0)$.

解 利用部分積分，可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st} F'(t)\, dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\left\{ e^{-st}F(t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st}F(t)\, dt \right\} \\
&= \lim_{P\to\infty}\left\{ e^{-sP}F(P) - F(0) + s\int_0^P e^{-st}F(t)\, dt \right\} \\
&= s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\, dt - F(0) \\
&= s f(s) - F(0)
\end{aligned}
$$

因在 $t\to\infty$ 時，$F(t)$ 爲 γ 指數級，故在 $s>\gamma$ 時 $\lim_{P\to\infty} e^{-sP}F(P) = 0$

若 $F(t)$ 在 $t=0$ 時不連續，則可參見問題68。

1.14 證明定理1.9，若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ 則 $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$.

解 由第13題，

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\,g(s) - G(0)$$

令 $G(t) = F'(t)$，則

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F''(t)\} &= s\mathcal{L}\{F'(t)\} - F'(0) \\
&= s[s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)] - F'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \\
&= s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)
\end{aligned}
$$

高階導式的計算，可用數學歸納法證明（見第65題）。

1.15 利用定理1.6，導出下列等式：

(a) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, (b) $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, (c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$.

解 在非例外情況下，定理 1-6 即陳述下列等式

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0) \tag{1}$$

(a) 令 $F(t)=1$，則 $F'(t)=0$，$F(0)=1$，故(1)變爲

$$\mathcal{L}\{0\} = 0 = s\mathcal{L}\{1\} - 1 \quad \text{或} \quad \mathcal{L}\{1\} = 1/s \tag{2}$$

(b) 令 $F(t)=t$，則 $F'(t)=1$，$F(0)=0$，利用(a)代入(1)式，得

$$\mathcal{L}\{1\} = 1/s = s\mathcal{L}\{t\} - 0 \quad \text{或} \quad \mathcal{L}\{t\} = 1/s^2 \tag{3}$$

由數學歸納法，可證明 $L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ 其中 n 爲正整數。

(c) 令 $F(t)=e^{at}$，則 $F'(t)=ae^{at}$，$F(0)=1$，故(1)變爲

$$\mathcal{L}\{ae^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1, \quad \text{i.e.} \quad a\mathcal{L}\{e^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1 \quad \text{or} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$$

1.16 利用定理 1-9證明 $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

解 令 $F(t) = \sin at$，則 $F'(t) = a\cos at$, $F''(t) = -a^2\sin at$, $F(0) = 0$, $F'(0) = a$.
故由

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$$

可得

$$\mathcal{L}\{-a^2\sin at\} = s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - s(0) - a$$

即

$$-a^2\mathcal{L}\{\sin at\} = s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - a$$

或

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

積分式的拉氏變換

1.17 證明定理 1-11：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = f(s)/s$.

解 令 $G(t) = \int_0^t F(u)\,du$，則 $G'(t) = F(t)$ 且 $G(0)=0$，等號兩邊取拉氏變換，得

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

故

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \quad \text{即} \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

1.18 求 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\}$.

解 由定理 1-13 之後的例子可得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

故由第 17 題，

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

乘上 t 的冪次

1.19 證明定理 1-12：

圈 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則 $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$ 其中 $n = 1, 2, 3\cdots$

由定義 $$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

再利用萊普尼茨規則（Leibnitz's rule），亦即將微分符號移至積分符號內，可得

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} = f'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}F(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st}F(t)\,dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}\{t\,F(t)\}\,dt \\ &= -\mathcal{L}\{t\,F(t)\}\end{aligned}$$

故 $$\mathcal{L}\{t\,F(t)\} = -\frac{df}{ds} = -f'(s) \tag{1}$$

由此證明了 $n = 1$ 的情形。

以下採用數學歸納法來證明此題。假設在 $n = k$ 時，原式成立，亦即假設

$$\int_0^\infty e^{-st}\{t^k F(t)\}\,dt = (-1)^k f^{(k)}(s) \tag{2}$$

則 $$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\{t^k F(t)\}\,dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

利用萊普尼茨規則

$$-\int_0^\infty e^{-st}\{t^{k+1} F(t)\}\,dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

即 $$\int_0^\infty e^{-st}\{t^{k+1} F(t)\}\,dt = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s) \tag{3}$$

故若(2)式成立（即 $n = k$ 時成立），則(3)式，即 $n = k+1$ 時亦成立。但由(1)得知，$n = 1$ 時成立，故 $n = 1+1=2$ 及 $n = 2+1=3$，…等均成立，故對於所有正整數的 n 值均成立。

若須更嚴密的證明，則須先證明萊普尼茨規則，這方面可參見第 166 題。

1.20 求 (a) $\mathcal{L}\{t \sin at\}$, (b) $\mathcal{L}\{t^2 \cos at\}$

答 (a) 因為 $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$，可由第 19 題解得

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

另解：

因 $$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt = \frac{s}{s^2+a^2}$$

對 a 微分（利用萊普尼茨規則）可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt &= \int_0^\infty e^{-st}\{-t\sin at\}\, dt = -\mathcal{L}\{t\sin at\}\\ &= \frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = -\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}\end{aligned}$$

由上可得

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

上述結果和下式是一致的 $\frac{d}{da}\mathcal{L}\{\cos at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{da}\cos at\right\}$.

(b) 因 $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$，再由第 19 題可得

$$\mathcal{L}\{t^2 \cos at\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{2s^3-6a^2s}{(s^2+a^2)^3}$$

亦可利用(a)部份的另解，將之寫成

$$\mathcal{L}\{t^2\cos at\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{d^2}{da^2}(\cos at)\right\} = -\frac{d^2}{da^2}\mathcal{L}\{\cos at\}$$

結果是相同的。

除以 t

1.21 證明定理 1-13：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則 $\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\, du.$

答　令$G(t)=\dfrac{F(t)}{t}$，則$F(t)=tG(t)$，等號雙方各取拉氏變換，並利用第19題，可得

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{G(t)\} \qquad 或 \qquad f(s) = -\frac{dg}{ds}$$

兩邊積分，可得

$$g(s) = -\int_{\infty}^{s} f(u)\,du = \int_{s}^{\infty} f(u)\,du \qquad (1)$$

則

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} f(u)\,du$$

注意在(1)式中，我們須選取積分常數s，使得$\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$（見定理1-15）。

1.22 (a)　證明$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)\,du$（假設以上積分值均收斂）

(b)　證明$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

答　(a)　由21題，

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_s^{\infty} f(u)\,du$$

令$s\to 0+$，並假設積分值收斂，則可得證

(b)　令$F(t)=\sin t$ 則在(a)中$f(s)=1/(s^2+1)$，故

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

週期函數

1.23　證明定理1-14：若$F(t)$有週期$T>0$，則

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^{T} e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

答　證明如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt \\ &= \int_0^{T} e^{-st}F(t)\,dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)\,dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st}F(t)\,dt + \cdots\end{aligned}$$

在第二積分式中，令 $t = u + T$，在第三積分式中，令 $t = u + 2T$，以此類推，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^T e^{-su} F(u)\,du + \int_0^T e^{-s(u+T)} F(u+T)\,du + \int_0^T e^{-s(u+2T)} F(u+2T)\,du + \cdots \\
&= \int_0^T e^{-su} F(u)\,du + e^{-sT}\int_0^T e^{-su} F(u)\,du + e^{-2sT}\int_0^T e^{-su} F(u)\,du + \cdots \\
&= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots)\int_0^T e^{-su} F(u)\,du \\
&= \frac{\int_0^T e^{-su} F(u)\,du}{1 - e^{-sT}}
\end{aligned}$$

其中我們用到週期函數之週期性 $F(u+T) = F(u)$, $F(u+2T) = F(u)$, 及以下之恒等式

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

1.24 (a) 畫出函數圖形

$$F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

將之擴展成週期爲 2π 的函數：

(b) 計算 $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

答 (a) 圖形見圖 1-5。

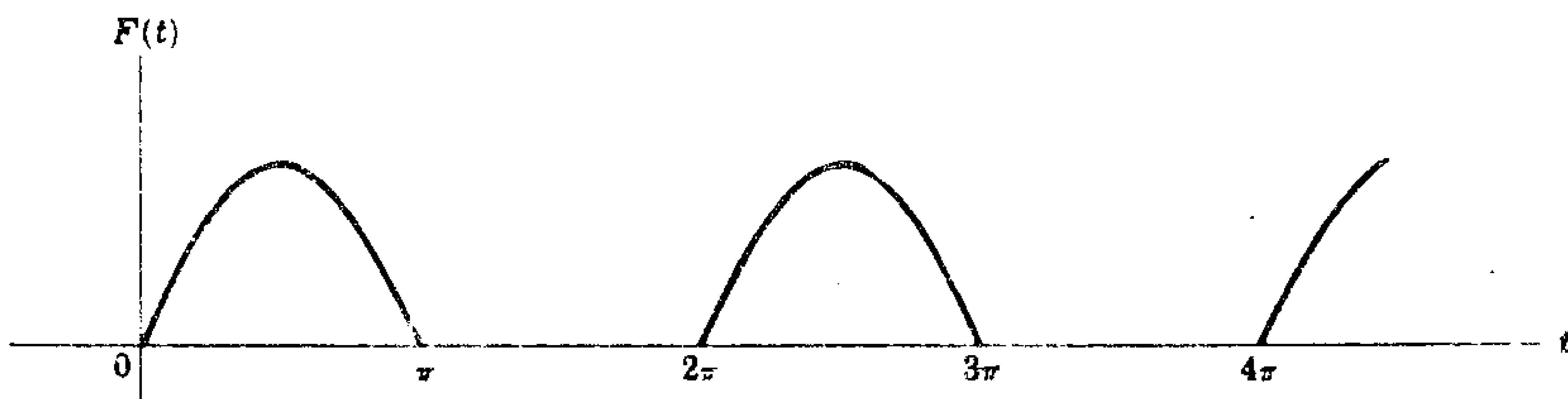


圖 1-5

(b) 由 23 題，將 $T = 2\pi$ 代入，得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st} F(t)\,dt \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st} \sin t\,dt \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}}\left\{\frac{e^{-st}(-s\sin t - \cos t)}{s^2+1}\right\}\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}}\left\{\frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2+1)}
\end{aligned}$$

其中用到第 2 題中的(1)式。

$F(t)$ 之圖形稱爲半波整流正弦曲線 (Half wave rectified sine curve)

初值及終值定理

1.25 證明初值定理：$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,f(s)$.

答 由 13 題

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = s\,f(s) - F(0) \tag{1}$$

若 $F'(t)$ 爲分段連續，且爲指數級，則

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

在(1)式中，令 $s\to\infty$，且假設 $F(t)$ 在 $t=0$ 連續，則可得

$$0 = \lim_{s\to\infty} s\,f(s) - F(0) \quad \text{或} \quad \lim_{s\to\infty} s\,f(s) = F(0) = \lim_{t\to 0} F(t)$$

若 $F(t)$ 在 $t=0$ 不連續，則此定理仍成立，只是我們必須改用定理 1-7。

1.26 證明終值定理：$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s)$.

答 由 13 題

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = s\,f(s) - F(0)$$

當 $s\to 0$ 時，第二個等號的左式可化爲

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = \int_0^\infty F'(t)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P F'(t)\,dt$$

$$= \lim_{P\to\infty}\{F(P) - F(0)\} = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(0)$$

$s\to 0$ 時，等號右式可化爲

$$\lim_{s\to 0} s\,f(s) - F(0)$$

故

$$\lim_{t\to\infty} F(t) - F(0) = \lim_{s\to 0} s\,f(s) - F(0)$$

即

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s)$$

若 $F(t)$ 不連續，則此定理仍成立，只是我們必須改用定理 1-7。

1.27 用 $F(t)=3e^{-2t}$，驗證 25 及 26 題。

答

$$F(t) = 3e^{-2t},\ f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{3}{s+2}.$$

由初值定理（25題），

$$\lim_{t\to 0} 3e^{-2t} = \lim_{s\to\infty}\frac{3s}{s+2}$$

即 3＝3，由此可知其成立。
由終值定理（26題），

$$\lim_{t\to\infty} 3e^{-2t} = \lim_{s\to 0}\frac{3s}{s+2}$$

即 0＝0，故亦成立。

伽瑪函數

1.28 證明：(a) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),\ n>0$; (b) $\Gamma(n+1) = n!,\ n = 1,2,3,\ldots$

解 (a)
$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty}\int_0^P u^n e^{-u}\,du$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left\{(u^n)(-e^{-u})\Big|_0^P - \int_0^P (-e^{-u})(nu^{n-1})\,du\right\}$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left\{-P^n e^{-P} + n\int_0^P u^{n-1}e^{-u}\,du\right\}$$
$$= n\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du = n\Gamma(n) \quad \text{其中 } n>0$$

(b)
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty}(1-e^{-P}) = 1.$$

令 n＝1，2，3，…代入 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$，得

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1,\quad \Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!,\quad \Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$$

一般而言，若 n 爲正整數，則 $\Gamma(n+1) = n!$。

1.29 證明：$\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

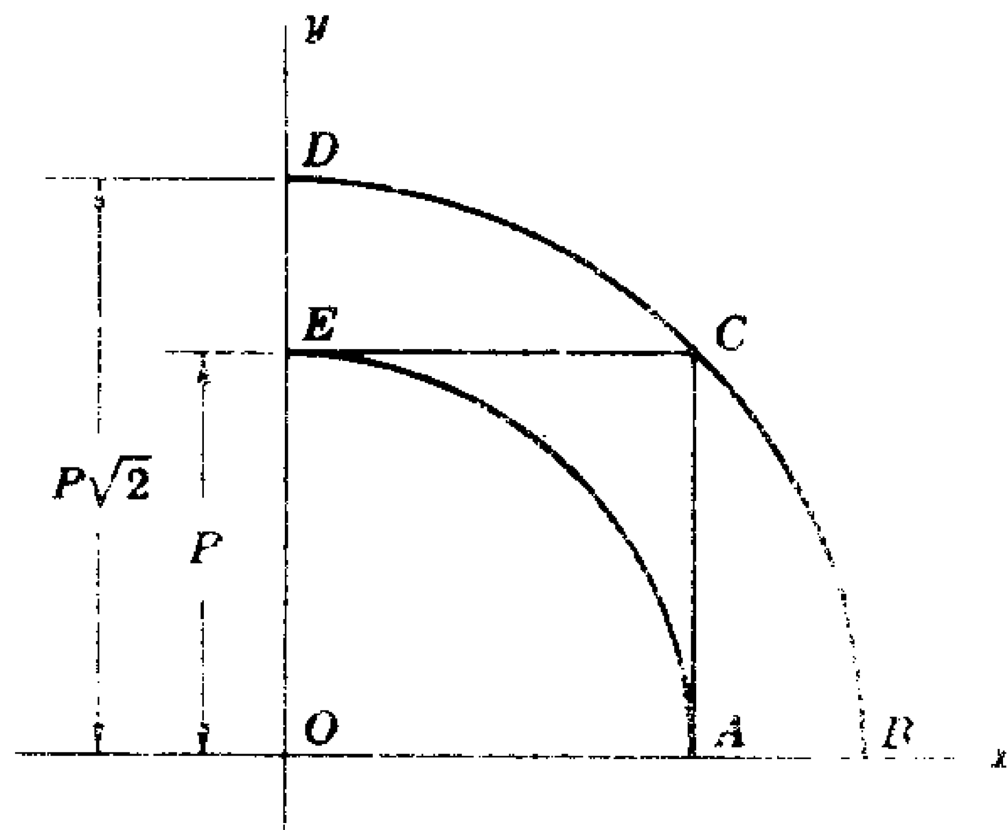


圖 1-6

解 令 $\displaystyle I_P = \int_0^P e^{-x^2}\,dx = \int_0^P e^{-y^2}\,dy$

且令 $\displaystyle\lim_{P\to\infty} I_P = I$，爲所求出之積分値，則

$$I_P^2 = \left(\int_0^P e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^P e^{-y^2}\,dy\right)$$
$$= \int_0^P\int_0^P e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}_P} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

其中R_P爲正方形$OACE$，邊長爲P（見圖 1-6）。
因被積函數爲正數，故

$$\iint_{\mathcal{R}_1} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqq I_P^2 \leqq \iint_{\mathcal{R}_2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \qquad (1)$$

其中R_1，R_2分別是半徑爲P及$P\sqrt{2}$的1／4 圓（在第一象限）。
利用極座標（γ，θ）代入(1)式，得

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{P} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \leqq I_P^2 \leqq \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{P\sqrt{2}} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \qquad (2)$$

即
$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-P^2}) \leqq I_P^2 \leqq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2P^2}) \qquad (3)$$

在(3)式中，令$P\to\infty$，可得 $\lim_{P\to\infty} I_P^2 = I^2 = \pi/4$ 及 $I = \sqrt{\pi}/2.$

1.30 證明：$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

圖 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u}\, du.$，令$u = v^2$，並利用29題，即可化簡得

$$2\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

1.31 證明：$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$，其中$n > -1$，$s > 0$。

圖 $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n\, dt.$，令 $st = u$，並假設$s > 0$，則

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n d\left(\frac{u}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

1.32 證明：$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s},\quad s > 0.$

圖 在31題中，令$n = -½$，則

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

雖然$F(t) = t^{-1/2}$不能滿足定理1-1的充分條件，但是其拉氏變換仍然存在。此函數滿足145題的定理。

1.33 假設$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$對所有的n值均成立，計算下列各值。

(*a*) $\Gamma(-\frac{1}{2})$, (*b*) $\Gamma(-\frac{3}{2})$, (*c*) $\Gamma(-\frac{5}{2})$, (*d*) $\Gamma(0)$, (*e*) $\Gamma(-1)$, (*f*) $\Gamma(-2)$.

圖 (a) 令 $n=-\frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$, 則 $\Gamma(-\frac{1}{2})=-2\Gamma(\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$.

(b) 令 $n=-\frac{3}{2}$, $\Gamma(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}\Gamma(-\frac{3}{2})$, 則由(a)可得 $\Gamma(-\frac{3}{2})=-\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2})=(2)(\frac{2}{3})\sqrt{\pi}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

(c) 令 $n=-\frac{5}{2}$, $\Gamma(-\frac{3}{2})=-\frac{5}{2}\Gamma(-\frac{5}{2})$ ，則由(b)可得 $\Gamma(-\frac{5}{2})=-\frac{2}{5}\Gamma(-\frac{3}{2})=-(2)(\frac{2}{3})(\frac{2}{5})\sqrt{\pi}=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$

(d) 令$n=0$，$\Gamma(1)=0\cdot\Gamma(0)$，因$\Gamma(1)=1$，故$\Gamma(0)$必爲$\infty$。

(e) 令$n=-1$，$\Gamma(0)=-1\Gamma(-1)$故$\Gamma(-1)$爲∞。

(f) 令$n=-2$，$\Gamma(-1)=-2\Gamma(-2)$故$\Gamma(-2)$爲∞。

一般而言，若p爲任意正整數或0，則$\Gamma(-p)$爲∞，且（見170題）

$$\Gamma(-p-\tfrac{1}{2}) = (-1)^{p+1}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\cdots\left(\frac{2}{2p+1}\right)\sqrt{\pi}$$

貝色函數

1.34 (a) 計算$\mathcal{L}\{J_0(t)\}$其中$J_0(t)$爲0階貝色函數。

(b) 由(a)之結果，計算 $\mathcal{L}\{J_0(at)\}$.

圖 (a) **解1**：利用級數，令（23）式的$n=0$，得

$$J_0(t) = 1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2 4^2}-\frac{t^6}{2^2 4^2 6^2}+\cdots$$

$$\text{故}\quad \mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{s}-\frac{1}{2^2}\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{2^2 4^2}\frac{4!}{s^5}-\frac{1}{2^2 4^2 6^2}\frac{6!}{s^7}+\cdots$$

$$= \frac{1}{s}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{s^4}\right)-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{s^6}\right)+\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{s}\left\{\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

其中用列二項式定理（見172題）。

解2：利用微分方程式，$J_0(t)$滿足下面之微分方程式。

$$tJ_0''(t)+J_0'(t)+tJ_0(t) = 0 \qquad (1)$$

（見性質5，其中$n=0$）取(1)式的拉氏變換，並利用定理1-6及1-9以及定理1-12，且$J_0(0)=1$，$J_0'(0)=0$，$y=\mathcal{L}\{J_0(t)\}$代入，得

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y-s(1)-0\}+\{sy-1\}-\frac{dy}{ds} = 0$$

化簡得

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{sy}{s^2+1}$$

故 $$\frac{dy}{y} = -\frac{s\,ds}{s^2+1}$$

積分得 $$y = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

但 $\lim_{s\to\infty} s\,y(s) = \frac{cs}{\sqrt{s^2+1}} = c$ 且 $\lim_{t\to 0} J_0(t) = 1$. ，故由初値定理得 $c = 1$ ，故 $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = 1/\sqrt{s^2+1}$.

還有另一解法，見 165 題。

(b) 由 11 題，

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{(s/a)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

1.35 計算 $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$ ，其中 $J_1(t)$ 爲 1 階貝色函數。

圖 由貝色函數的性質 3 ，得 $J_0'(t) = -J_1(t)$ ，故

$$\mathcal{L}\{J_1(t)\} = -\mathcal{L}\{J_0'(t)\} = -[s\mathcal{L}\{J_0(t)\} - 1]$$
$$= 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$$

亦可用無限級數及微分方程的方法解之（見 178 題）。

正弦、餘弦及指數積分

1.36 證明： $\mathcal{L}\{\text{Si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$.

圖 解 1 ：令 $F(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$. ，則 $F(0)=0$ 且 $F'(t) = \frac{\sin t}{t}$ 或 $tF'(t) = \sin t$。

取拉氏變換，得

$$\mathcal{L}\{tF'(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} \text{ 或 } -\frac{d}{ds}\{s f(s) - F(0)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

即 $$\frac{d}{ds}\{s f(s)\} = \frac{-1}{s^2+1}$$

積分之， $$s f(s) = -\tan^{-1} s + c$$

由初値定理， $\lim_{s\to\infty} s f(s) = \lim_{t\to 0} F(t) = F(0) = 0$ 故 $c = \pi/2$ ，得

$$s f(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1}\frac{1}{s} \text{ 或 } f(s) = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

解 2：見18題。

解 3：利用無限級數，得

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^t \frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots\right) du$$
$$= t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

故
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\right\} = \mathcal{L}\left\{t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{s^4} + \frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{s^6} - \frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{s^8} + \cdots$$
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s^4} + \frac{1}{5s^6} - \frac{1}{7s^8} + \cdots$$
$$= \frac{1}{s}\left\{\frac{(1/s)}{1} - \frac{(1/s)^3}{3} + \frac{(1/s)^5}{5} - \frac{(1/s)^7}{7} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

其中用到 $\tan^{-1}x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots,\ |x| < 1.$

解 4：令 $u = tv$，

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^1 \frac{\sin tv}{v}\,dv$$

則
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^1 \frac{\sin tv}{v}\,dv\right\}$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^1 \frac{\sin tv}{v}\,dv\right\} dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{v}\left\{\int_0^\infty e^{-st}\sin tv\,dt\right\} dv$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathcal{L}\{\sin tv\}}{v}\,dv = \int_0^1 \frac{dv}{s^2+v^2}$$
$$= \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{v}{s}\Big|_0^1 = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

其中我們假設積分的先後次序是可以對調的。

1.37 證明：$\mathcal{L}\{\mathrm{Ci}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du\right\} = \dfrac{\ln(s^2+1)}{2s}$.

答 利用36題，解1的方法．令 $F(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$ 則 $F'(t) = -\frac{\cos t}{t}$

且 $tF'(t) = -\cos t$，取拉氏變換，得

$$-\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} = \frac{-s}{s^2+1} \quad 或 \quad \frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} = \frac{s}{s^2+}$$

積分得 $$s\,f(s) = \tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) + c$$

再由終值定理，$\lim_{s\to 0} s\,f(s) = \lim_{t\to\infty} F(t) = 0$ 故 $c=0$，代入得

$$s\,f(s) = \tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) \quad 或 \quad f(s) = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}$$

亦可用 36 題解 4 的方法解之（見 153 題）。

1.38 證明：$\mathcal{L}\{\mathrm{Ei}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right\} = \frac{\ln(s+1)}{s}$.

解 令 $F(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$.，則 $tF'(t) = -e^{-t}$，取拉氏變換，得

$$-\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} = \frac{-1}{s+1} \quad 或 \quad \frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} = \frac{1}{s+1}$$

積分得， $$s\,f(s) = \ln(s+1) + c$$

再利用終值定理（如同 37 題），得 $c=0$，代入得

$$f(s) = \frac{\ln(s+1)}{s}$$

在第 153 題中，有類似 36 題，解 4 的方法。

誤差函數

1.39 證明：$\mathcal{L}\{\mathrm{erf}\sqrt{t}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$.

解 利用無限級數，得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\left(1 - u^2 + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \cdots\right)du\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5\cdot 2!} - \frac{t^{7/2}}{7\cdot 3!} + \cdots\right)\right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5\cdot 2!\,s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7\cdot 3!\,s^{9/2}} + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{s^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^{5/2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^{7/2}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^{9/2}} + \cdots \\
&= \frac{1}{s^{3/2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^3} + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{-1/2} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

其中用到二項式定理（見172題）。

175題(a)中有其他解法。

脈衝函數（狄瑞克三角形函數）

1.40 證明 $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ 其中 $u(t-a)$ 爲單位階梯函數。

答 由定義 $u(t-a) = \begin{cases} 1 & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$，故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)\,dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\int_a^P e^{-st}\,dt = \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^P \\ &= \lim_{P\to\infty}\frac{e^{-as}-e^{-sP}}{s} = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

另解：

因 $\mathcal{L}\{1\}=1/s$，故由第9題得，$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}/s$.

1.41 求 $\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\}$ 其中 $F_\epsilon(t)$ 乃由第12頁，（30）式所定義。

答 由定義 $F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0\leqq t\leqq\epsilon \\ 0 & t>\epsilon \end{cases}$ 故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}F_\epsilon(t)\,dt \\ &= \int_0^\epsilon e^{-st}(1/\epsilon)\,dt + \int_\epsilon^\infty e^{-st}(0)\,dt \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon e^{-st}\,dt = \frac{1-e^{-s\epsilon}}{\epsilon s} \end{aligned}$$

1.42 (a) 在41題中，證明 $\lim_{\epsilon\to0}\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} = 1$

(b) (a)之結果和 $\mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon\to0}F_\epsilon(t)\right\}$ 是否相同？解釋之。

答 (a) 證明如下

$$\lim_{\epsilon\to0}\frac{1-e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0}\frac{1-(1-s\epsilon+s^2\epsilon^2/2!-\cdots)}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0}\left(1-\frac{s\epsilon}{2!}+\cdots\right) = 1$$

亦可由羅哈士比托規則（L'Hospital's rule）求之。

(b) 由數學的觀點來看，$\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(t)$ 並不存在，故 $\mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(t)\right\}$ 亦無定義。然而我們令 $\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(t)$，以致於 $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$，這却是非常有用的。$\delta(t)$ 稱爲狄瑞克三角形函數（Dirac delta function）或脈衝函數（Impulse function）。

1.43 證明 $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$，其中 $\delta(t)$ 爲脈衝函數。

圖 利用第 9 題及 $\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$ 即可解得。

1.44 指出下列何者爲零積函數？

(a) $F(t) = \begin{cases} 1 & t=1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, (b) $F(t) = \begin{cases} 1 & 1\leqq t\leqq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, (c) $F(t) = \delta(t)$.

圖 (a) 對於所有的 $t>0$，$\int_0^t F(u)\,du = 0$，故 $F(t)$ 爲零積函數。

(b) 若 $t<1$，則 $\int_0^t F(u)\,du = 0.$

若 $1\leq t\leq 2$，則 $\int_0^t F(u)\,du = \int_1^t (1)\,du = t-1.$

若 $t>2$，則 $\int_0^t F(u)\,du = \int_1^2 (1)\,du = 1.$

因對於所有的 $t>0$，$\int_0^t F(u)\,du \neq 0$，故 $F(t)$ 不是零積函數。

(c) 因對於所有的 $t>0$ $\int_0^t \delta(u)\,du = 1$，故 $\delta(t)$ 不是零積函數。

積分的計算

1.45 求 (a) $\int_0^\infty t\,e^{-2t}\cos t\,dt$, (b) $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt$.

圖 (a) 由 19 題，

$$\mathcal{L}\{t\cos t\} = \int_0^\infty t\,e^{-st}\cos t\,dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

令 $s=2$，得 $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt = \frac{3}{25}.$

(b) 若 $F(t) = e^{-t}-e^{-3t}$，則 $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$，由 21 題可得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left\{\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+3}\right\}du$$

或 $$\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right)dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

取 $s\to 0+$，可得 $\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\,dt = \ln 3.$

1.46 證明(a) $\int_0^{\infty} J_0(t)\,dt = 1$, (b) $\int_0^{\infty} e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\,dt = \sqrt{2}/2$.

解 (a) 由 34 題，$$\int_0^{\infty} e^{-st}J_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

令 $s\to 0+$，得 $$\int_0^{\infty} J_0(t)\,dt = 1.$$

(b) 由 39 題，$$\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{erf}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

令 $s\to 1$，得 $$\int_0^{\infty} e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\,dt = \sqrt{2}/2.$$

其他各類問題

1.47 證明定理 1-1。

解 對於任意正數N，我們有

$$\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^{N} e^{-st}F(t)\,dt + \int_N^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$$

因在 $0\leq t\leq N$的區間中，$F(t)$是分段連續的，故等號右邊的第一個積分式存在。而等號右邊的第二個積分式亦存在。這是因爲在 $t>N$時，$F(t)$爲γ指數級。爲了更明白表達，只要參見下式即可明白。

$$\begin{aligned}\left|\int_N^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt\right| &\leq \int_N^{\infty} |e^{-st}F(t)|\,dt\\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-st}|F(t)|\,dt\\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-st}Me^{\gamma t}\,dt = \frac{M}{s-\gamma}\end{aligned}$$

故當 $s > \gamma$ 時，拉氏變換式存在。

1.48 求 $\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\}$。

答 **解 1**：利用級數

$$\sin\sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{t})^7}{7!} + \cdots = t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \cdots$$

取拉氏變換，得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\} &= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3!\,s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5!\,s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7!\,s^{9/2}} + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2 s}\right) + \frac{(1/2^2 s)^2}{2!} - \frac{(1/2^2 s)^3}{3!} + \cdots\right\} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}e^{-1/2^2 s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}e^{-1/4s}\end{aligned}$$

解 2：利用微分方程式

令 $Y(t) = \sin\sqrt{t}$，將之微分兩次後，可發現

$$4tY'' + 2Y' + Y = 0$$

取拉氏變換，並令 $y = \mathcal{L}\{Y(t)\}$，得

$$-4\frac{d}{ds}\{s^2 y - s\,Y(0) - Y'(0)\} + 2\{s\,y - Y(0)\} + y = 0$$

或

$$4\,s^2 y' + (6\,s - 1)y = 0$$

解得，

$$y = \frac{c}{s^{3/2}}e^{-1/4s}$$

t 很小時，可得 $\sin\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ 且 $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$，$s$ 很大時，得 $y \sim c/s^{3/2}$，比較後可知 $c = \sqrt{\pi}/2$，故

$$\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}e^{-1/4s}$$

1.49 求 $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$.

答 令 $F(t) = \sin\sqrt{t}$，則 $F'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$，$F(0) = 0$，故由48題，

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = s\,f(s) - F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{1/2}}e^{-1/4s}$$

故得 $$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}e^{-1/4s}$$

亦可用級數法解之（見1.75 題(b)）。

1.50 證明

$$\mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1)-\ln s}{s} = -\frac{\gamma+\ln s}{s}$$

其中$\gamma = .5772156\cdots$稱爲奧衣勒常數（Euler's constant）。

㊟ 由定義得 $$\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1}e^{-u}\,du$$

對γ微分，得

$$\Gamma'(r) = \int_0^\infty u^{r-1}e^{-u}\ln u\,du$$

由上式得 $$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-u}\ln u\,du$$

令$u = st$，$s > 0$，將上式再化簡，得

$$\Gamma'(1) = s\int_0^\infty e^{-st}(\ln s + \ln t)\,dt$$

故 $$\mathcal{L}\{\ln t\} = \int_0^\infty e^{-st}\ln t\,dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \ln s\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = -\frac{\gamma+\ln s}{s}$$

另解：當$k > -1$時，下式成立

$$\int_0^\infty e^{-st}t^k\,dt = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$$

對k微分，

$$\int_0^\infty e^{-st}t^k\ln t\,dt = \frac{\Gamma'(k+1) - \Gamma(k+1)\ln s}{s^{k+1}}$$

令$k = 0$，就可得所需之結果，

$$\int_0^\infty e^{-st}\ln t\,dt = \mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1)-\ln s}{s} = -\frac{\gamma+\ln s}{s}$$

補充題

基本函數的拉氏變換

1.51 求下列各函數的拉氏變換，並指明當其拉氏變換存在時，s 的範圍所在。

函數	答	
(a) $2e^{4t}$	(a) $2/(s-4)$,	$s>4$
(b) $3e^{-2t}$	(b) $3/(s+2)$,	$s>-2$
(c) $5t-3$	(c) $(5-3s)/s^2$,	$s>0$
(d) $2t^2-e^{-t}$	(d) $(4+4s-s^3)/s^3(s+1)$,	$s>0$
(e) $3\cos 5t$	(e) $3s/(s^2+25)$,	$s>0$
(f) $10\sin 6t$	(f) $60/(s^2+36)$,	$s>0$
(g) $6\sin 2t-5\cos 2t$	(g) $(12-5s)/(s^2+4)$,	$s>0$
(h) $(t^2+1)^2$	(h) $(s^4+4s^2+24)/s^5$,	$s>0$
(i) $(\sin t-\cos t)^2$	(i) $(s^2-2s+4)/s(s^2+4)$,	$s>0$
(j) $3\cosh 5t-4\sinh 5t$	(j) $(3s-20)/(s^2-25)$,	$s>5$

1.52 求 (a) $\mathcal{L}\{(5e^{2t}-3)^2\}$, (b) $\mathcal{L}\{4\cos^2 2t\}$.

答 (a) $\dfrac{25}{s-4}-\dfrac{30}{s-2}+\dfrac{9}{s},\ s>4$ (b) $\dfrac{2}{s}+\dfrac{2s}{s^2+16},\ s>0$

1.53 求 $\mathcal{L}\{\cosh^2 4t\}$. 答 $\dfrac{s^2-32}{s(s^2-64)}$

1.54 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 其中 (a) $F(t)=\begin{cases}0 & 0<t<2\\ 4 & t>2\end{cases}$, (b) $F(t)=\begin{cases}2t & 0\leqq t\leqq 5\\ 1 & t>5\end{cases}$

答 (a) $4e^{-2s}/s$ (b) $\dfrac{2}{s^2}(1-e^{-5s})-\dfrac{10}{s}e^{-5s}$

1.55 證明 $\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n=1,2,3,\ldots$

1.56 探討下列函數的拉氏變換是否存在。

(a) $1/(t+1)$, (b) e^{t^2-t}, (c) $\cos t^2$ 答 (a)存在，(b)不存在，(c)存在

線性、平移及標度改變性質

1.57 求 $\mathcal{L}\{3t^4-2t^3+4e^{-3t}-2\sin 5t+3\cos 2t\}$.

答 $\dfrac{72}{s^5}-\dfrac{12}{s^4}+\dfrac{4}{s+3}-\dfrac{10}{s^2+25}+\dfrac{3s}{s^2+4}$

1.58 計算下列各式

(*a*) $\mathcal{L}\{t^3e^{-3t}\}$ 答 (*a*) $6/(s+3)^4$

(*b*) $\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\}$ (*b*) $(s+1)/(s^2+2s+5)$

(*c*) $\mathcal{L}\{2e^{3t}\sin 4t\}$ (*c*) $8/(s^2-6s+25)$

(*d*) $\mathcal{L}\{(t+2)^2e^t\}$ (*d*) $(4s^2-4s+2)/(s-1)^3$

(*e*) $\mathcal{L}\{e^{2t}(3\sin 4t - 4\cos 4t)\}$ (*e*) $(20-4s)/(s^2-4s+20)$

(*f*) $\mathcal{L}\{e^{-4t}\cosh 2t\}$ (*f*) $(s+4)/(s^2+8s+12)$

(*g*) $\mathcal{L}\{e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)\}$ (*g*) $(1-5s)/(s^2+2s-3)$

1.59 求 (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{(1+te^{-t})^3\}$.

答 (*a*) $\dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$ (*b*) $\dfrac{1}{s}+\dfrac{3}{(s+1)^2}+\dfrac{6}{(s+2)^3}+\dfrac{6}{(s+3)^4}$

1.60 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$其中 $F(t) = \begin{cases}(t-1)^2 & t>1\\ 0 & 0<t<1\end{cases}$. 答 $2e^{-s}/s^3$

1.61 若$F_1(t)$, $F_2(t)$, …, $F_n(t)$的拉氏變換式分別是$f_1(s)$, $f_2(s)$, …, $f_n(s)$且c_1, c_2, …, c_n為任意常數，證明

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)+\cdots+c_nF_n(t)\} = c_1f_1(s)+c_2f_2(s)+\cdots+c_nf_n(s)$$

1.62 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{s^2-s+1}{(2s+1)^2(s-1)}$，求 $\mathcal{L}\{F(2t)\}$. 答 $(s^2-2s+4)/4(s+1)^2(s-2)$

1.63 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{e^{-1/s}}{s}$，求 $\mathcal{L}\{e^{-t}F(3t)\}$. 答 $\dfrac{e^{-3/(s+1)}}{s+1}$

1.64 若$f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$，證明當$r>0$時，

$$\mathcal{L}\{r^tF(at)\} = \frac{1}{s-\ln r}f\left(\frac{s-\ln r}{a}\right)$$

導式的拉氏變換

1.65 (a) 若$\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，證明

$$\mathcal{L}\{F'''(t)\} = s^3f(s)-s^2F(0)-sF'(0)-F''(0)$$

說明$F(t)$須滿足那些條件

(b) 推廣(a)的結果，並以數學歸納法證明之。

1.66 給定 $F(t)=\begin{cases}2t & 0\leqq t\leqq 1\\ t & t>1\end{cases}$. (a)求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$. (b)求 $\mathcal{L}\{F'(t)\}$. (c)下列等式 $\mathcal{L}\{F'(t)\}=s\mathcal{L}\{F(t)\}-F(0)$ 能成立嗎？解釋之。

$(a)\ \frac{2}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2},\quad (b)\ \frac{2}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$

1.67 (a) 求 $F(t)=\begin{cases}t^2 & 0<t\leqq 1\\ 0 & t>1\end{cases}$，求 $\mathcal{L}\{F''(t)\}$.

(b) 下列等式 $\mathcal{L}\{F''(t)\}=s^2\mathcal{L}\{F(t)\}-sF(0)-F'(0)$ 能成立嗎？解釋之。

答 $(a)\ 2(1-e^{-s})/s$

1.68 證明：(a)定理 1-7；(b)定理 1-8。

積分式之拉氏變換

1.69 直接證明 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t (u^2-u+e^{-u})\,du\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{t^2-t+e^{-t}\}$.

1.70 若 $f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$，證明 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}F(u)\,du\right\}=\frac{f(s)}{s^2}$.

$\left[\text{上面之雙重積分式可簡潔地寫成 } \int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^2.\right]$

1.71 推廣 70 題的結論。

1.72 證明 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\}=\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$.

1.73 證明 $\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t}\frac{e^{-t}\sin u}{u}\,du\,dt=\frac{\pi}{4}$.

乘以 t 的冪次

1.74 證明 (a) $\mathcal{L}\{t\cos at\}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(b) $\mathcal{L}\{t\sin at\}=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

1.75 求 $\mathcal{L}\{t(3\sin 2t-2\cos 2t)\}$. 答 $\frac{8+12s-2s^2}{(s^2+4)^2}$

1.76 證明 $\mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \dfrac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$.

1.77 計算 (a) $\mathcal{L}\{t \cosh 3t\}$, (b) $\mathcal{L}\{t \sinh 2t\}$. 答 (a) $(s^2+9)/(s^2-9)^2$, (b) $4s/(s^2-4)^2$

1.78 求 (a) $\mathcal{L}\{t^2 \cos t\}$, (b) $\mathcal{L}\{(t^2-3t+2)\sin 3t\}$.

答 (a) $(2s^3-6s)/(s^2+1)^3$, (b) $\dfrac{6s^4-18s^3+126s^2-162s+432}{(s^2+9)^3}$

1.79 求 $\mathcal{L}\{t^3 \cos t\}$. 答 $\dfrac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$

1.80 證明 $\displaystyle\int_0^\infty t\,e^{-3t} \sin t\,dt = \frac{3}{50}$.

除以 t

1.81 證明 $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$.

1.82 證明 $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$.

1.83 求 $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sinh t}{t}\right\}$. *Ans.* $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)$

1.84 證明 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\,dt = \ln 2$. ［提示：利用81題］

1.35 計算 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\,dt$. *Ans.* $\ln(3/2)$

1.86 證明 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

週期函數

1.87 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 其中 $F(t)$ 爲圖 1-7 所示之週期函數。

答 $\dfrac{1}{s}\tanh\dfrac{s}{2}$

$\{F(t)\}$

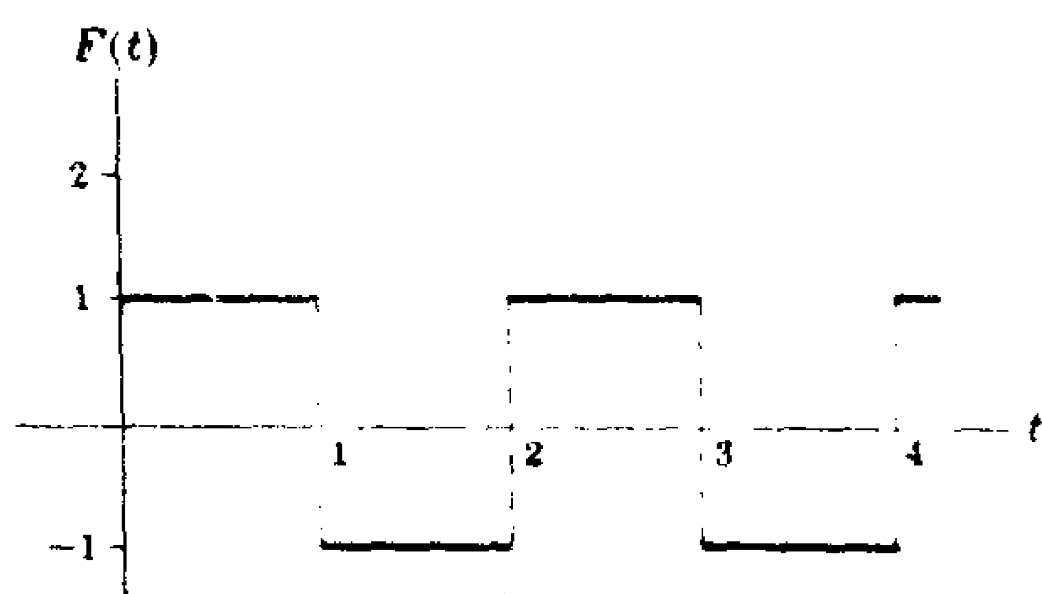


圖1-7

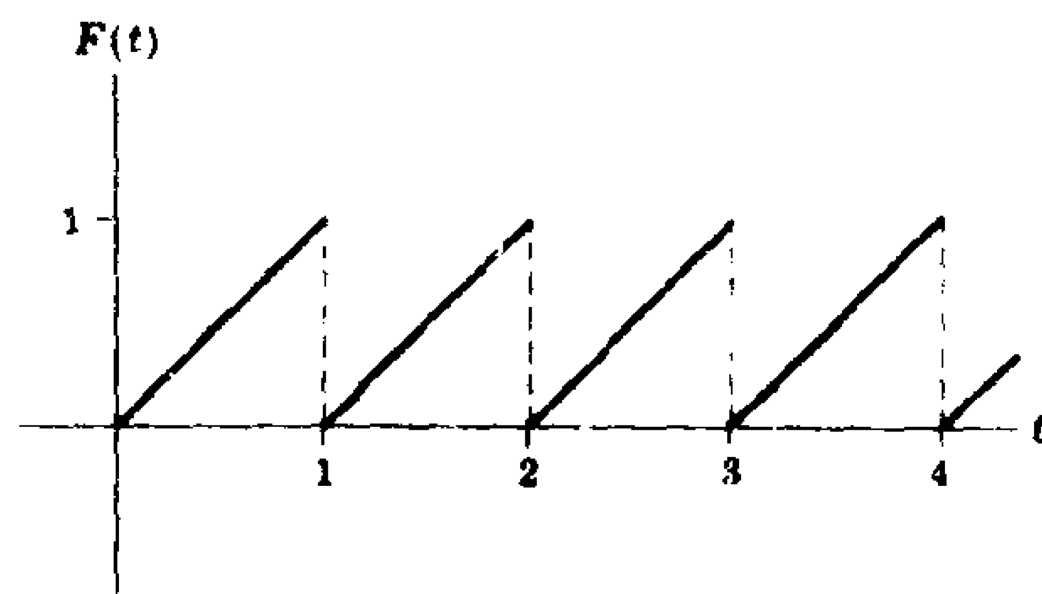


圖1-8

1.88 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 其中 $F(t)$ 爲圖1-8所示之週期函數。

答 $\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

1.89 令 $F(t)=\begin{cases}3t & 0<t<2\\ 6 & 2<t<4\end{cases}$ 其中 $F(t)$ 之週期爲4，(a)畫出 $F(t)$，(b)求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$。

答 (b) $\dfrac{3-3e^{-2s}-6se^{-4s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

1.90 若 $F(t)=t^2$，$0<t<2$ 且 $F(t+2)=F(t)$，求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$。

答 $\dfrac{2-2e^{-2s}-4se^{-2s}-4s^2e^{-2s}}{s^3(1-e^{-2s})}$

1.91 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 其中 $F(t)=\begin{cases}t & 0<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases}$，且對於所有 $t>0$，滿足 $F(t+2)=F(t)$。

答 $\dfrac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})}$

1.92 (a) 證明圖1-9所示之三角波曲線，其拉氏變換爲 $\dfrac{1}{s^2}\tanh\dfrac{s}{2}$。

(b) (a)之結果是否可由87題求得？解釋之。

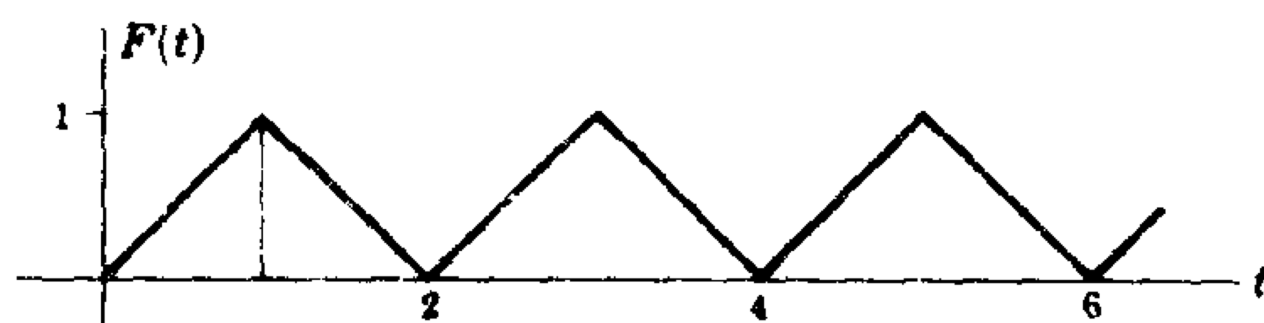


圖1-9

初值及終值定理

1.93 對以下之函數驗證初值定理 (*a*) $3-2\cos t$, (*b*) $(2t+3)^2$, (*c*) $t+\sin 3t$.

1.94 對以下之函數驗證終值定理 (*a*) $1+e^{-t}(\sin t+\cos t)$, (*b*) $t^3 e^{-2t}$.

1.95 討論終值定理是否可用於函數 $\cos t$。

1.96 若當 $t\to 0$ 時，$F(t)\sim ct^p$，其中 $p>-1$，證明當 $s\to\infty$ 時，$f(s)\sim c\Gamma(p+1)/s^{p+1}$

1.97 若當 $t\to\infty$ 時，$F(t)\sim ct^p$，其中 $p>-1$，證明當 $s\to\infty$ 時，$f(s)\sim c\Gamma(p+1)/s^{p+1}$

伽瑪函數

1.98 計算 (*a*) $\Gamma(5)$, (*b*) $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}$, (*c*) $\Gamma(5/2)$, (*d*) $\dfrac{\Gamma(3/2)\Gamma(4)}{\Gamma(11/2)}$.

答 (*a*) 24, (*b*) 1/60, (*c*) $3\sqrt{\pi}/4$, (*d*) 32/315

1.99 求 (*a*) $\mathcal{L}\{t^{1/2}+t^{-1/2}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^{-1/3}\}$, (*c*) $\mathcal{L}\{(1+\sqrt{t})^4\}$.

答 (*a*) $(2s+1)\sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, (*b*) $\Gamma(2/3)/s^{2/3}$, (*c*) $(s^2+2\sqrt{\pi}\,s^{3/2}+6s+3\sqrt{\pi}\,s^{1/2}+2)/s^3$

1.100 求 (*a*) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^{7/2}e^{3t}\}$.

答 (*a*) $\sqrt{\pi/(s+2)}$, (*b*) $105\sqrt{\pi}/16(s-3)^{9/2}$

貝色函數

1.101 證明 $\mathcal{L}\{e^{-at}J_0(bt)\}=\dfrac{1}{\sqrt{s^2-2as+a^2+b^2}}$.

1.102 證明 $\mathcal{L}\{t\,J_0(at)\}=\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$.

1.103 求 (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-3t}J_0(4t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\,J_0(2t)\}$. 答 (*a*) $\dfrac{1}{\sqrt{s^2+6s+25}}$, (*b*) $\dfrac{s}{(s^2+4)^{3/2}}$

1.104 證明 (*a*) $J_0'(t)=-J_1(t)$, (*b*) $\dfrac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\}=t^n J_{n-1}(t)$.

1.105 若 $I_0(t)=J_0(it)$，證明 $\mathcal{L}\{I_0(at)\}=\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$, $a>0$.

1.106 求 $\mathcal{L}\{t\,J_0(t)\,e^{-t}\}$. 答 $(s-1)/(s^2-2s+2)^{3/2}$

1.107 證明 (*a*) $\displaystyle\int_0^\infty J_0(t)\,dt=1$, (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}J_0(t)\,dt=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.108 求 $\frac{d^2}{dt^2}\{e^{2t}J_0(2t)\}$. 的拉氏變換。 答 $\frac{s^2}{\sqrt{s^2-4s+8}}-s-2$

1.109 證明 $\mathcal{L}\{t\,J_1(t)\} = \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}$.

1.110 證明 $\mathcal{L}\{J_0(a\sqrt{t})\} = \frac{e^{-a^2/4s}}{s}$.

1.111 計算 $\int_0^\infty t\,e^{-3t}J_0(4t)\,dt$. 答 3/125

1.112 證明 $\mathcal{L}\{J_n(t)\} = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$ 由此可得 $\mathcal{L}\{J_n(at)\}$.

正弦、餘弦及指數積分

1.113 計算 (a) $\mathcal{L}\{e^{2t}\,\mathrm{Si}(t)\}$, (b) $\mathcal{L}\{t\,\mathrm{Si}(t)\}$.

答 (a) $\tan^{-1}(s-2)/(s-2)$, (b) $\frac{\tan^{-1}s}{s^2}-\frac{1}{s(s^2+1)}$

1.114 證明 $\mathcal{L}\{t^2\,\mathrm{Ci}(t)\} = \frac{\ln(s^2+1)}{s^3}-\frac{3s^2+1}{s(s^2+1)^2}$.

1.115 求 (a) $\mathcal{L}\{e^{-3t}\,\mathrm{Ei}(t)\}$, (b) $\mathcal{L}\{t\,\mathrm{Ei}(t)\}$.

答 (a) $\frac{\ln(s+4)}{s+3}$, (b) $\frac{\ln(s+1)}{s^2}-\frac{1}{s(s+1)}$

1.116 求 (a) $\mathcal{L}\{e^{-t}\,\mathrm{Si}(2t)\}$, (b) $\mathcal{L}\{te^{-2t}\,\mathrm{Ei}(3t)\}$.

答 (a) $\frac{\tan^{-1}(s+1)/2}{s+1}$, (b) $\frac{1}{(s+2)^2}\ln\left(\frac{s+5}{3}\right)-\frac{1}{(s+2)(s+5)}$

誤差函數

1.117 計算 (a) $\mathcal{L}\{e^{3t}\,\mathrm{erf}\sqrt{t}\}$, (b) $\mathcal{L}\{t\,\mathrm{erf}(2\sqrt{t})\}$.

答 (a) $\frac{1}{(s-3)\sqrt{s-2}}$, (b) $\frac{3s+8}{s^2(s+4)^{3/2}}$

1.118 證明 $\mathcal{L}\{\mathrm{erfc}\sqrt{t}\} = \frac{1}{\sqrt{s+1}\,\{\sqrt{s+1}+1\}}$.

1.119 求 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \text{erf}\sqrt{u}\,du\right\}$　　答 $1/s^2\sqrt{s+1}$

單位階梯函數和脈衝函數（狄瑞克三角形函數）

1.120 (a) 利用單位階梯函數，證明 $F(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$ 可寫成 $e^{-t}\{1-\mathcal{U}(t-3)\}$.

(b) 利用 $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}/s$ 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$。

答 (b) $\dfrac{1-e^{-3(s+1)}}{s+1}$

1.121 證明 $F(t) = \begin{cases} F_1(t) & 0<t<a \\ F_2(t) & t>a \end{cases}$ 可改寫成

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t) - F_1(t)\}\mathcal{U}(t-a)$$

1.122 若在 $0<t<a_1$ 時，$F(t)=F_1(t)$，在 $a_1<t<a_2$ 時，$F(t)=F_2(t)$ … 在 $a_{n-2}<t<a_{n-1}$ 時，$F(t)=F_{n-1}(t)$，且在 $t>a_{n-1}$ 時，$F(t)=F_n(t)$ 證明

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t)-F_1(t)\}\mathcal{U}(t-a_1) + \cdots + \{F_n(t)-F_{n-1}(t)\}\mathcal{U}(t-a_{n-1})$$

1.123 將下列函數以單位階梯函數表之。

(a) $F(t) = \begin{cases} t^2 & 0<t<2 \\ 4t & t>2 \end{cases}$　　(b) $F(t) = \begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ \sin 2t & \pi<t<2\pi \\ \sin 3t & t>2\pi \end{cases}$

答 (a) $t^2 + (4t-t^2)\mathcal{U}(t-2)$, (b) $\sin t + (\sin 2t - \sin t)\mathcal{U}(t-\pi) + (\sin 3t - \sin 2t)\mathcal{U}(t-2\pi)$

1.124 證明 $\mathcal{L}\{t^2\mathcal{U}(t-2)\} = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{2e^{-2s}}{s^3}(1+2s+2s^2)$, $s>0$.

1.125 計算 (a) $\int_{-\infty}^{\infty}\cos 2t\,\delta(t-\pi/3)\,dt$, (b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\,\mathcal{U}(t-2)\,dt$.　　答 (a) $-1/2$, (b) e^{-2}

1.126 (a) 若 $\delta'(t-a)$ 是三角形函數的導式，證明

$$\int_0^{\infty} F(t)\,\delta'(t-a)\,dt = -F'(a)$$

(b) 計算 $\int_0^{\infty} e^{-4t}\,\delta'(t-2)\,dt$.

答 (b) $4e^{-8}$

1.127 在 $0\le t<\epsilon$ 時，$G_\epsilon(t)=1/\epsilon$；$\epsilon\le t<2\epsilon$ 時，$G_\epsilon(t)=0$；$2\epsilon\le t<3\epsilon$ 時，

$G_\epsilon(t) = -1/\epsilon$；$t \geq 3\epsilon$ 時，$G_\epsilon(t) = 0$

(a) 求 $\mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\}$，(b)求 $\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\}$，(c) $\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\} = \mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(t)\right\}$是否成立？

(d) 從幾何觀點來討論(a)及(b)之結果。

1.128 定義$G_\epsilon(t)$爲 ϵ 和 n 的函數，且 $\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(t) = s^n$（其中 $n=2, 3, 4\cdots$），由此推廣問題127之結論。

積分式之計算

1.129 計算 $\int_0^\infty t^3 e^{-t} \sin t\, dt$. 答 0。

1.130 證明 $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$.

1.131 證明 (a) $\int_0^\infty J_n(t)\, dt = 1$, (b) $\int_0^\infty t\, J_n(t)\, dt = 1$.

1.132 證明 $\int_0^\infty u\, e^{-u^2} J_0(au)\, du = \frac{1}{2} e^{-a^2/4}$.

1.133 證明 $\int_0^\infty t\, e^{-t}\, \mathrm{Ei}(t)\, dt = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

1.134 證明 $\int_0^\infty u\, e^{-u^2} \operatorname{erf} u\, du = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

其他各類問題

1.135 若 $F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$，證明 $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

1.136 若 $F(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi \\ \sin t & t > \pi \end{cases}$，求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$. 答 $\frac{s + (s-1)e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

1.137 證明 $\mathcal{L}\{\sin^3 t\} = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$.

1.138 驗證第 B-2 頁表格中的下列各條公式 (a) 16, (b) 17, (c) 20, (d) 28

1.139 求 (a) $\mathcal{L}\{\sinh^3 2t\}$, (b) $\mathcal{L}\{t^3\cos 4t\}$.

答 (a) $\dfrac{48}{(s^2-36)(s^2-4)}$, (b) $\dfrac{6s^4-576s^2+1536}{(s^2+16)^4}$

1.140 在 $t>\pi/4$ 時，$F(t)=5\sin 3(t-\pi/4)$，$t<\pi/4$ 時，$F(t)=0$，求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$。

答 $e^{-\pi s/4}/(s^2+9)$

1.141 令 $\mathcal{L}\{tF(t)\}=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$，求 $\mathcal{L}\{e^{-t}F(2t)\}$.

1.142 求 (a) $\mathcal{L}\{\sinh 2t\cos 2t\}$, (b) $\mathcal{L}\{\cosh 2t\cos 2t\}$.

答 (a) $2(s^2-8)/(s^4+64)$, (b) $s^3/(s^4+64)$

1.143 令 $F(t)=\begin{cases} t+n & 2n\leqq t<2n+1 \\ n-t & 2n+1\leqq t<2n+2 \end{cases}$, $n=0,1,2,\ldots$ 證明

$$\mathcal{L}\{F(t)\}=\frac{1}{s^2}\sum_{n=0}^{\infty}\{(3ns+1)e^{-2ns}-2[(2n+1)s+1]e^{-(2n+1)s}+[(n+2)s+1]e^{-(2n+2)s}\}$$

1.144 (a) 證明 $\mathcal{L}\{\sin^5 t\}=\dfrac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+16)}$.

(b) 利用(a)及137題，是否可以對於 $\mathcal{L}\{\sin^{2n-1}t\}$（其中 n 爲任意正整數）獲得對應之結果？驗證你的猜測。

1.145 若當 $t\to 0$ 時，$F(t)$爲無界（Unbounded）。證明若滿足下列條件，則 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 存在。

(a) 在任意區間 $N_1\leq t\leq N$（$N_1>0$）中，$F(t)$爲分段連續。

(b) 對於 $0<n<1$ 的特定常數 n，$\lim_{t\to 0} t^n F(t)=0$。

(c) 對於 $t>N$，$F(t)$爲 γ 指數級。

1.146 證明 (a) $\mathcal{L}\{J_0(t)\sin t\}=\dfrac{1}{\sqrt{s}\sqrt[4]{s^2+4}}\sin\{\frac{1}{2}\tan^{-1}(2/s)\}$

(b) $\mathcal{L}\{J_0(t)\cos t\}=\dfrac{1}{\sqrt{s}\sqrt[4]{s^2+4}}\cos\{\frac{1}{2}\tan^{-1}(2/s)\}$

1.147 令 $F(t)=\begin{cases} tG(t) & t>1 \\ 0 & 0<t<1 \end{cases}$. 證明 $\mathcal{L}\{F(t)\}=-\dfrac{d}{ds}[e^{-s}\mathcal{L}\{G(t+1)\}]$.

1.148 若 $\mathcal{L}\{F''(t)\}=\tan^{-1}(1/s)$，且 $F(0)=2$，$F'(0)=-1$，求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

答 $\dfrac{2s-1+\tan^{-1}1/s}{s^2}$

1.149 證明 $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}F(\beta t)\} = \frac{1}{\beta} f\left(\frac{s-\alpha}{\beta}\right)$ 其中 α 、β 爲常數，且 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$.

1.150 證明 e^{e^t} 的拉氏變換不存在，但 e^{-e^t} 的拉氏變換存在。

1.151 (a) 證明 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$.

(b) 計算 $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}\,dt$.

答 (b) $\frac{1}{4}\ln 5$

1.152 (a) 求 $\mathcal{L}\left\{\frac{1-J_0(t)}{t}\right\}$ ，(b)證明 $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\{1-J_0(t)\}}{t}\,dt = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.

1.153 利用 36 題解 4 的方法，求37 及 38題。

1.154 若在 $s=a$ （ a 爲實數）時，$\mathcal{L}\{F(t)\}$ 存在，證明對於所有 $s>a$ ，$\mathcal{L}\{F(t)\}$ 均存在。

1.155 求如圖 1-10 所示週期函數的拉氏變換。

答 $\frac{1-e^{-as}-as\,e^{-as}}{s^2(1-e^{-as})}\tan\theta_0$

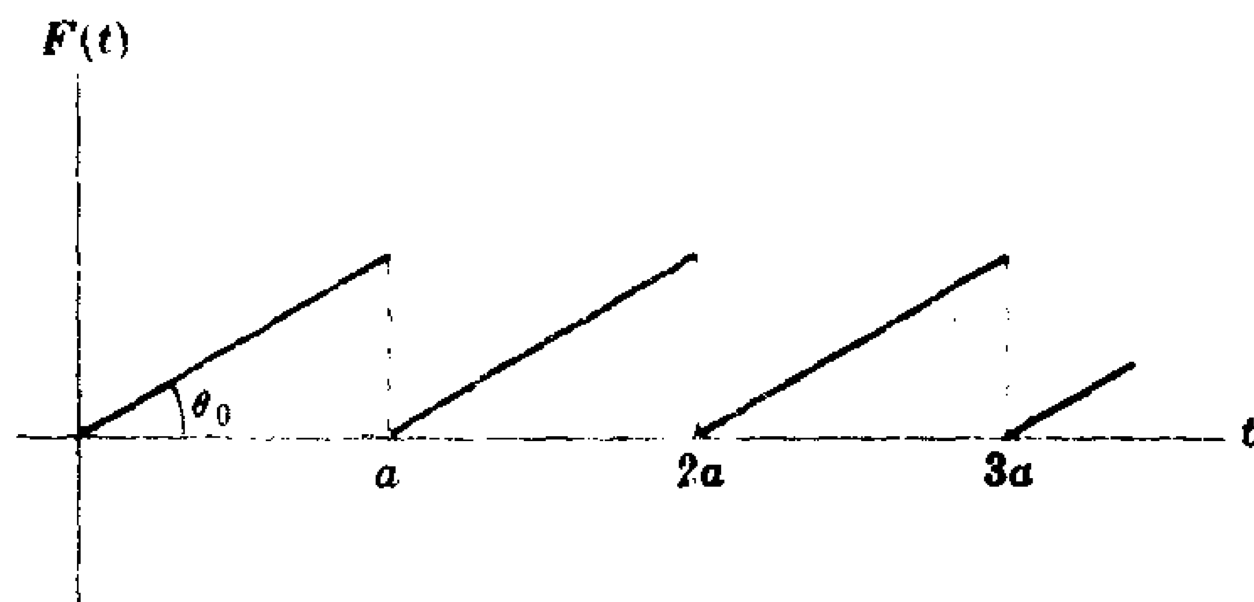


圖 1-10

1.156 證明 $\mathcal{L}\{\sin t^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(4n-2)!}{(2n-1)!\,s^{2n+1}}$

1.157 證明 $\mathcal{L}\{\sin^6 t\} = \frac{6!}{s(s^2+4)(s^2+16)(s^2+64)}$ 並推廣之（參見144題）

1.158 求 $\mathcal{L}\{t\,e^{-2t}J_0(t\sqrt{2})\}$. 答 $\frac{s+2}{(s^2+4s+6)^{3/2}}$

1.159 求 $\mathcal{L}\{t\,\mathcal{U}(t-1)+t^2\delta(t-1)\}$. 答 $e^{-s}(s^2+s+1)/s^2$

1.160 求 $\mathcal{L}\{\cos t\ln t\,\delta(t-\pi)\}$. 答 $-e^{-\pi s}\ln\pi$

1.161 若$F(t)$和$G(t)$在每個有限區間均爲分段連續，且在$t\to\infty$時，均是指數級函數，證明$\mathcal{L}\{F(t)\,G(t)\}$存在。

1.162 拉各耳多項式（Laguerre polynomials）$L_n(t)$定義如下

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\{t^n e^{-t}\} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) 求 $L_0(t), L_1(t), \ldots, L_4(t)$. ，(b)求 $\mathcal{L}\{L_n(t)\}$.

1.163 (a) 令a，b，α，β及$\wedge$均是常數，證明

$$\mathcal{L}\{at^{-\alpha} + bt^{-\beta}\} = \Lambda\{as^{-\alpha} + bs^{-\beta}\}$$

若且唯若$\alpha+\beta=1$且 $\Lambda = \pm\sqrt{\pi \csc \alpha\pi}$.

(b) 若$\mathcal{L}\{F(t)\}=F(s)$，則函數$F(t)$爲其本身的拉氏變換。$F(t)=at^{-\alpha}+bt^{-\beta}$ 可能是其本身的拉氏變換嗎？解釋之。

1.164 若$F(t)$及$G(t)$的拉氏變換均存在，則$F(t)G(t)$的拉氏變換是否也存在呢？驗證你的結論。

1.165 利用 $J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta)\, d\theta$ 證明 $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

1.166 證明萊普尼茨規則可用於 19 題，並說明須加諸於$F(t)$的限制。

1.167 (a) 證明 $\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right) dt = \frac{\pi}{2} - s\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) + 2\tan^{-1} s.$

(b) 證明 $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$

1.168 若t爲無理數，則$F(t)=0$，若t爲有理數，則$F(t)=1$，(a)證明$\mathcal{L}\{F(t)\}$存在，且等於 0 。(b)$F(t)$是否爲零積函數？解釋之。

1.169 證明 $\int_0^{\infty} t^2 J_0(t)\, dt = -1.$

1.170 若p爲任意正數，證明下式成立，

$$\Gamma(-p-\tfrac{1}{2}) = (-1)^{p+1}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\cdots\left(\frac{2}{2p+1}\right)\sqrt{\pi}$$

1.171 驗證在附錄B的表格中，下列各條公式是否成立(a) 55，(b) 61，(c) 64，(d) 65，(e) 81。

1.172 利用二項式定理，證明在 $|x|<1$時，下式成立

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

由此亦可驗證 34 及 39 題中，無限級數的求和運算。

1.173 利用無限級數，求得下列各式的拉氏變換 (a) $\sin t$, (b) $\cos t$, (c) e^{at}, (d) $\cos\sqrt{t}$.

1.174 證明 $\mathcal{L}\{\operatorname{erf}(t)\} = \frac{e^{s^2/4}}{s}\operatorname{erfc}(s/2)$ 由此求得 $\mathcal{L}\{\operatorname{erf}(at)\}$.

1.175 (a) 利用微分方程的方法來求 $\mathcal{L}\{\operatorname{erf}\sqrt{t}\}$。
(b) 利用無限級數法來求 $\mathcal{L}\{\cos\sqrt{t}/\sqrt{t}\}$。

1.176 證明(a) $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{tu})\cos u\,du = \sin t$,

(b) $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{tu})\sin u\,du = \cos t$.

1.177 證明 $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{tu})J_0(u)\,du = J_0(t)$.

1.178 利用(a)無限級數，(b)微分方程式來求 $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$。參見 35 題。

1.179 若 $s>0$ 且 $n>1$，證明

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\right\} = \Gamma(n)\left\{\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \frac{1}{(s+2)^n} + \cdots\right\}$$

1.180 證明若 $n>1$，

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t-1}\,dt = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

函數 $\zeta(n)$ 稱爲里曼葉特函數 (Riemann zeta function)。

1.181 若 $f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$，證明

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du\right\} = \frac{f(\ln s)}{s\ln s}$$

1.182 若 $L_n(t)$, $n=0,1,2,\cdots$，爲拉各耳多項式（見162題），證明

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(t)}{n!} = e\,J_0(2\sqrt{t})$$

1.183 令 $J(a,t) = \int_0^\infty e^{-u^2 t}\cos au\,du$，(a)證明 $\frac{\partial J}{\partial a} = -\frac{a}{2t}J$ 其中 $J(0,t)=\sqrt{\pi}/2\sqrt{t}$. (b)藉著

解出(a)之微分方程式，證明

$$J(a, t) = \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos au \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-a^2/4t}$$

1.184 利用183題，求 $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ ［參見49題］

1.185 證明 $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{2}t}\sinh t \sin t}{t} dt = \frac{\pi}{8}$.

第二章

反拉卜拉士變換

2·1 反拉卜拉士變換的定義

若函數$F(t)$的拉卜拉士變換是$f(s)$，即$\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，則$F(t)$稱為$f(s)$的**反拉卜拉士變換**(Inverse Laplace transform)，或簡稱反拉氏變換，記為$F(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$，其中$\mathcal{L}^{-1}$稱為**反拉卜拉士變換運算子**(Inverse Laplace transformation operator)。

例題 2.1

因 $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}=\frac{1}{s+3}$ ，可寫成

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}$$

2·2 反拉卜拉士變換的唯一性(勒契定理)

對於一個零積函數$\mathcal{N}(t)$而言，其拉氏變換為0。(見第一章)，故若$\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，則$\mathcal{L}\{F(t)+\mathcal{N}(t)\}=f(s)$亦成立，所以對於兩個不同的函數而言，它們的拉氏變換可能是相同的。

例題 2.2

兩不同函數$F_1(t)=e^{-3t}$， $F_2(t)=\begin{cases}0 & t=1\\ e^{-3t} & \text{其他}\end{cases}$

它們的拉氏變換均是 $\frac{1}{s+3}$

如果我們承認零積函數的存在，則由上可看出拉氏變換並非唯一的。但是如果我們不承認零積函數(事實上此函數幾乎不存在於任何物理現象中)，則拉氏變換就是唯一存在了！此結論如下。

定理 2-1：勒契定理(Lerch's theorem)：若我們將$F(t)$加諸兩項限制，(1)在每個有限區間$0\leq t\leq N$中，$F(t)$為分段連續，(2)當$t>N$時，$F(t)$為指數級

，則 $f(s)$ 的反拉氏變換（即 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$）爲唯一。除非另有說明，否則我們通常認定此種唯一性已經具備。

2·3 一些反拉氏變換

下列結果乃是直接由第一頁表格中得到

反拉氏變換表

	$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^{n+1}}$ $n=0,1,2,\ldots$	$\frac{t^n}{n!}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
6.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
8.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

2·4 反拉氏變換的一些性質

以下列出一些反拉氏變換的重要性質。可和拉氏變換的性質 1～8 比較之。

1. 線性性質

定理 2-2： 若 c_1，c_2 爲任意常數，且 $f_1(s)$，$f_2(s)$ 分別是 $F_1(t)$，$F_2(t)$ 的拉氏變換，則

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1f_1(s)+c_2f_2(s)\} &= c_1\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\}+c_2\mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} \\ &= c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\end{aligned} \quad (1)$$

此結果可輕易地推廣到兩個函數以上。

例題2.3

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= 4e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\sin 2t$$

由於此性質，我們稱$\mathcal{L}^{-1}$爲線性運算子（Linear operator），亦即$\mathcal{L}^{-1}$具有線性性質。

2. 第一平移性質

定理 2-3：若$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t) \tag{2}$$

例題 2.4

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^{t}\sin 2t$$

3. 第二平移定理

定理 2-4：若$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases} \tag{3}$$

例題 2.5

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \sin(t-\pi/3) & \text{if } t>\pi/3 \\ 0 & \text{if } t<\pi/3 \end{cases}$$

4. 標度改變性質

定理 2-5：若$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right) \tag{4}$$

例題 2.6

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\} = \frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2} = \frac{1}{2}\cos 2t$$

5. 導式的反拉氏變換

定理 2-6：若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t) \tag{5}$$

例題 2.7

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ 且 $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -t\sin t \quad 即 \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$$

6. 積分式的反拉氏變換

定理 2-7：若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\} = \frac{F(t)}{t} \tag{6}$$

例題 2.8

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\} = 1-e^{-t}$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

7. 乘以 s^n

定理 2-8：若$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$且$F(0)=0$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{s f(s)\} = F'(t) \tag{7}$$

故乘以 s 的作用就等於將$F(t)$微分一次。

若$F(0)\neq 0$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{s f(s) - F(0)\} = F'(t) \tag{8}$$

即

$$\mathcal{L}^{-1}\{s f(s)\} = F'(t) + F(0)\,\delta(t) \tag{9}$$

其中$\delta(t)$為單位脈衝函數。

例題 2.9

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ 　且 $\sin 0=0$，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

可自行推廣至 $\mathcal{L}^{-1}\{s^n f(s)\},\ n=2,3,\ldots,$

8. 除以 s

定理 2-9：若$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du \tag{10}$$

故除以 s（即乘以 $1/s$）之作用，相當於將$F(t)$從0積分至 t。

例題 2.10

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$ ，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u\,du = \frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

亦可自行推廣至 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)/s^n\},\ n=2,3,\ldots,$

9. 摺積性質

定理 2-10：若$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$且$\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}=G(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du = F*G \tag{11}$$

我們稱$F*G$爲函數F和G的**摺積**(Convolution)或**貫通**(Faltung)，此定理稱爲**摺積定理或性質**(Convolution theorem or property)。

由 21 題可知$F*G=G*F$。

例題 2.11

因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ 且 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^u e^{2(t-u)}\,du = e^{2t}-e^t$$

2·5 計算反拉氏變換的方法

以下列出許多計算反拉氏變換的不同方法，可和第 1 章比較之。

1. **部分分式法**：任何的有理函數$P(s)/Q(s)$(其中$P(s)$和$Q(s)$均爲多項式，且$P(s)$的次數小於$Q(s)$的次數)，均可表成有理函數之和(或稱部分分式，partial fractions)，其形式爲 $\frac{A}{(as+b)^r}$, $\frac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}$，其中$r=1, 2, 3\cdots$藉著求出各個部分分式的反拉氏變換，我們即可求得$\mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\}$。

例題 2.12

$$\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4}+\frac{B}{(2s+1)^3}+\frac{C}{(2s+1)^2}+\frac{D}{2s+1}$$

例題 2.13

$$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+4}+\frac{E}{s-5}$$

A、B、C 等常數的決定，可由等號兩邊通分後（去掉分母），並比較具有相同次數的 s 項之係數來決定之。此法稱爲**黑佛塞展開公式**（Heaviside expansion formula）（見下述）。其他方法可見 24～28 題。

2. **級數法**：若 $f(s)$ 可展開爲 s 的負次項級數，即

$$f(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \cdots \tag{12}$$

則在一般情形下，我們可逐項進行反拉氏變換

$$F(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \cdots \tag{13}$$

可參見 40 題。不同於（12）式的級數展開亦能使用，參見 41 題。

3. **微分方程式法**：參見問題 41。
4. **對某參數微分**：見問題 13 及 38。
5. **利用以上定理**的其他各類方法。
6. **查表法**（見附錄 B）。
7. **複數反變換公式**：此法爲求得反拉氏變換的最有效、最直接方法，但須用到複變數理論，可參見第 6 章。

2・6 黑佛塞展開公式

令 $P(s)$ 及 $Q(s)$ 均爲多項式，且 $Q(s)$ 次數大於 $P(s)$ 次數。假設 $Q(s)$ 有 n 個互不相同的零點 α_k，$k = 1, 2, 3 \cdots n$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \tag{14}$$

此法稱爲**黑佛塞展開定理或公式**（Heaviside's expansion theorem or formula）。可參見 29～31 題。

此公式亦可應用於其他情形（見 105 及 111 題）。

2・7 貝他函數

若 $m > 0$，$n > 0$，定義**貝他函數**（Beta function）如下

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du \tag{15}$$

它具有下列性質（見 32 及 33 題）。

1. $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$

2·8 積分的計算

拉氏變換在計算定積分方面非常有用，可參見 35～37 題之例子。

附解題

反拉氏變換

1.1 證明 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, 其中 $0! = 1$，

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{\sin at}{a}$, (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$, (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-a^2}\right\} = \dfrac{\sinh at}{a}$,

(f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$.

解 (a) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$. 故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$.

(b) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^n}{n!}\right\} = \dfrac{1}{n!}\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{s^{n+1}}$. 故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\} = \dfrac{t^n}{n!}$ for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(c) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin at}{a}\right\} = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{s^2+a^2} = \dfrac{1}{s^2+a^2}$. 故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{\sin at}{a}$.

(d) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$. 故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$.

(e) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sinh at}{a}\right\} = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{s^2-a^2} = \dfrac{1}{s^2-a^2}$. 故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-a^2}\right\} = \dfrac{\sinh at}{a}$.

(f) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$. 故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$.

2.2 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ ，其中 $n > -1$

圖 $\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\right\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad n > -1$

上面利用到31題。

故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, $n > -1$.，**注意**：若$n=0$，1，2，3，…，則Γ（n+1）=n!此結果和1(b)是一致的。

2.3 求下列各式的反拉式變換。

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16}\right\}$ (g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3}\right\}$

圖 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{\sin 3t}{3}$ [第1題(c)]

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} = 4e^{2t}$ [第1題(a)]

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{6}$ [第1題(b)或第2題]

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} = \cos\sqrt{2}\,t$ [第1題(d)]

(e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{s^2-16}\right\} = 6\cosh 4t$ [第1題(f)]

(f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3}\right\} = \frac{\sinh\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}$ [第1題(e)]

(g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} = \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ [第2題]

線性、平移及標度改變性質

2.4 證明反拉氏變換具有線性性質（定理2-2）。

圖 由第5題得

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s) + c_2f_2(s)$$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1f_1(s) + c_2f_2(s)\} &= c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\\ &= c_1\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}\end{aligned}$$

此結果亦可輕易推廣之。(見52題)

2.5 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+4}{s^3}-\dfrac{2s-18}{s^2+9}+\dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3}-\dfrac{3+4s}{9s^2-16}+\dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$.

答 (a)
$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+4}{s^3}-\frac{2s-18}{s^2+9}+\frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}+\frac{4}{s^3}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{18}{s^2+9}+\frac{24}{s^4}-\frac{30}{s^{7/2}}\right\}\\
&= 5t + 4(t^2/2!) - 2\cos 3t + 18(\tfrac{1}{3}\sin 3t) + 24(t^3/3!) - 30\{t^{5/2}/\Gamma(7/2)\}\\
&= 5t + 2t^2 - 2\cos 3t + 6\sin 3t + 4t^3 - 16t^{5/2}/\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

其中用到 $\Gamma(7/2)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

(b)
$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3}-\frac{3+4s}{9s^2-16}+\frac{8-6s}{16s^2+9}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-3/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2-16/9}\right)-\frac{4}{9}\left(\frac{s}{s^2-16/9}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+9/16}\right)-\frac{3}{8}\left(\frac{s}{s^2+9/16}\right)\right\}\\
&= 3e^{3t/2} - \tfrac{1}{4}\sinh 4t/3 - \tfrac{4}{9}\cosh 4t/3 + \tfrac{2}{3}\sin 3t/4 - \tfrac{3}{8}\cos 3t/4
\end{aligned}$$

2.6 證明第一平移性質:若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$,則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

答 由第7題可得 $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$. 故

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

另解:因 $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$ 故

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}\,dt = \mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}$$

故解得 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$

2.7 計算下列各式:

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

答 (a)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\right\} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6\,e^{2t}\cos 4t + 2\,e^{2t}\sin 4t = 2\,e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t)$$

(b)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{(s+4)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4\,e^{-4t} - 4t\,e^{-4t} = 4\,e^{-4t}(1-t)$$

(c)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-1)^2-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$= 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2-4}\right\} + 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$= 3\,e^{t}\cosh 2t + 5\,e^{t}\sinh 2t = e^{t}(3\cosh 2t + 5\sinh 2t)$$

$$= 4\,e^{3t} - e^{-t}$$

在第24題中，有其他解法。

(d)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3/2)^{1/2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-3t/2}\,\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,t^{-1/2}\,e^{-3t/2}$$

2.8 證明第二平移性質：

若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$，則 $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$ 其中

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

答 **解1**：由第9題可得 $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$. 故

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$$

解2：因 $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$，故

$$e^{-as}f(s) = \int_0^\infty e^{-as}e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(t+a)}F(t)\,dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-su}F(u-a)\,du \qquad [\text{letting } t+a=u]$$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt$$

故得證。

在此我們可將 $G(t)$ 寫爲 $F(t-a)\,U(t-a)$，其中 $U(t-a)$ 爲單位階梯函數。

2.9　計算下列各式：

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}$,　(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}\right\}$,　(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$,　(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$.

答　(a)因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^4}\right\} = e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\} = \dfrac{t^3e^{2t}}{3!} = \dfrac{1}{6}t^3e^{2t}$，由第 8 題可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \begin{cases}\frac{1}{6}(t-5)^3e^{2(t-5)} & t>5\\ 0 & t<5\end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{6}(t-5)^3e^{2(t-5)}\,\mathcal{U}(t-5)$$

(b)因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+25}\right\} = \cos 5t$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}\right\} = \begin{cases}\cos 5(t-4\pi/5) & t>4\pi/5\\ 0 & t<4\pi/5\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\cos 5t & t>4\pi/5\\ 0 & t<4\pi/5\end{cases}$$

$$= \cos 5t\ \mathcal{U}(t-4\pi/5)$$

(c)因

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right\} & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right\} u(t-\pi)$$

(d)因

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\}$$

$$= e^{-4t}\frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4t^{3/2}e^{-4t}}{3\sqrt{\pi}}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4e^4(t-3)^{3/2}e^{-4(t-3)}}{3\sqrt{\pi}} & t > 3 \\ 0 & t < 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4(t-3)^{3/2}e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}} & t > 3 \\ 0 & t < 3 \end{cases}$$

$$= \frac{4(t-3)^{3/2}e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}}u(t-3)$$

2.10 證明標度改變性質：若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$　，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$$

圖　**解 1**，由第 11 題，以 $1/k$ 替代 a，可得　$\mathcal{L}\{F(t/k)\} = kf(ks)$　，故

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$$

解 2：因 $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$　，故

$$f(ks) = \int_0^\infty e^{-kst}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-su}F(u/k)\,d(u/k) \qquad [\text{令}\ u = kt]$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-su}F(u/k)\,du = \frac{1}{k}\mathcal{L}\{F(t/k)\}$$

所以 $\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k).$

1.11 若 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$ ，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\}$ 其中 $a>0$ 。

解 由11題，以 ks 替代 s ，可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{(ks)^{1/2}}\right\} = \frac{1}{k}\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi(t/k)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}}$$

即

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}}$$

再令 $k = 1/a$ ，

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$$

導式和積分式的反拉氏變換

2.12 證明定理 2-6 ： $\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t),\ n = 1,2,3,\ldots.$

解 因 $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$ ［參見19題］，故

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$$

2.13 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$.

解 因為 $\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$. ，故 $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right).$

又因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$ ，再利用 12 題可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t\left(\frac{\sin at}{a}\right) = \frac{t\sin at}{2a}$$

另解；對 a 微分，可得

$$\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

即

$$\frac{d}{da}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = -2a\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

所以

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2a}\frac{d}{da}(\cos at) = -\frac{1}{2a}(-t\sin at) = \frac{t\sin at}{2a}$$

2.14 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$.

解　令 $f(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right) = \mathcal{L}\{F(t)\}$，則 $f'(s) = \frac{-2}{s(s^2+1)} = -2\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}$.

所以 $\mathcal{L}^{-1}\{f'(s)\} = -2(1-\cos t) = -tF(t),\quad F(t) = \frac{2(1-\cos t)}{t}$.

乘以和除以 s 的冪次

2.15 證明定理 2-9：$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du$.

解　令 $G(t) = \int_0^t F(u)\,du$.，則 $G'(t) = F(t),\ G(0) = 0$，故

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

化簡得 $\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s}$　即　$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = G(t) = \int_0^t F(u)\,du$

可和 17 題比較之。

2.16 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$.

解　令 $G(t) = \int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$ 則 $G'(t) = \int_0^t F(u)\,du$ and $G''(t) = F(t)$，但

代入得

$$\mathcal{L}\{G''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{G(t)\} - sG(0) - G'(0) = s^2\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

故 $\mathcal{L}\{G(t)\} = \dfrac{f(s)}{s^2}$ 即 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = G(t) = \displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$

此結果可寫成 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^2.$

一般而言，$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^n}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt^n$

2.17 計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$.

答 因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$，重覆利用 15 題之結論，可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin u\,du = 1 - \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1-\cos u)\,du = t - \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (u-\sin u)\,du = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1$$

驗算：$\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^2}{2} + \cos t - 1\right\} = \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{s^2+1+s^4-s^2(s^2+1)}{s^3(s^2+1)} = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

2.18 已知 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \dfrac{1}{2}t\sin t$，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$.

答 **解 1**：由定理 2-9（第 15 題），可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \int_0^t \tfrac{1}{2}u\sin u\,du$$

$$= (\tfrac{1}{2}u)(-\cos u) - (\tfrac{1}{2})(-\sin u)\Big|_0^t$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

解 2：由定理 2-8，可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1-1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}t\sin t\} = \tfrac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} - \tfrac{1}{2}(t\cos t + \sin t) = \tfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

2.19 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$.

圖 利用 14 題，可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\} = \int_0^t \frac{2(1-\cos u)}{u}\,du = 2\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}\,du$$

摺積定理

2.20 證明摺積定理 (Convolution theorem)，若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ 且 $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}=G(t)$，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du = F*G$$

圖 欲證明上述定理，就是等於證明下列等式

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\} = f(s)\,g(s) \tag{1}$$

其中 $f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$, $g(s)=\mathcal{L}\{G(t)\}$，(1)式的等號左式可化爲

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left\{\int_{u=0}^{t} F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt$$
$$= \int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt = \lim_{M\to\infty} s_M$$

其中
$$s_M = \int_{t=0}^{M}\int_{u=0}^{t} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt \tag{2}$$

(2)式在 tu 平面上的積分範圍可參見圖 1-2，

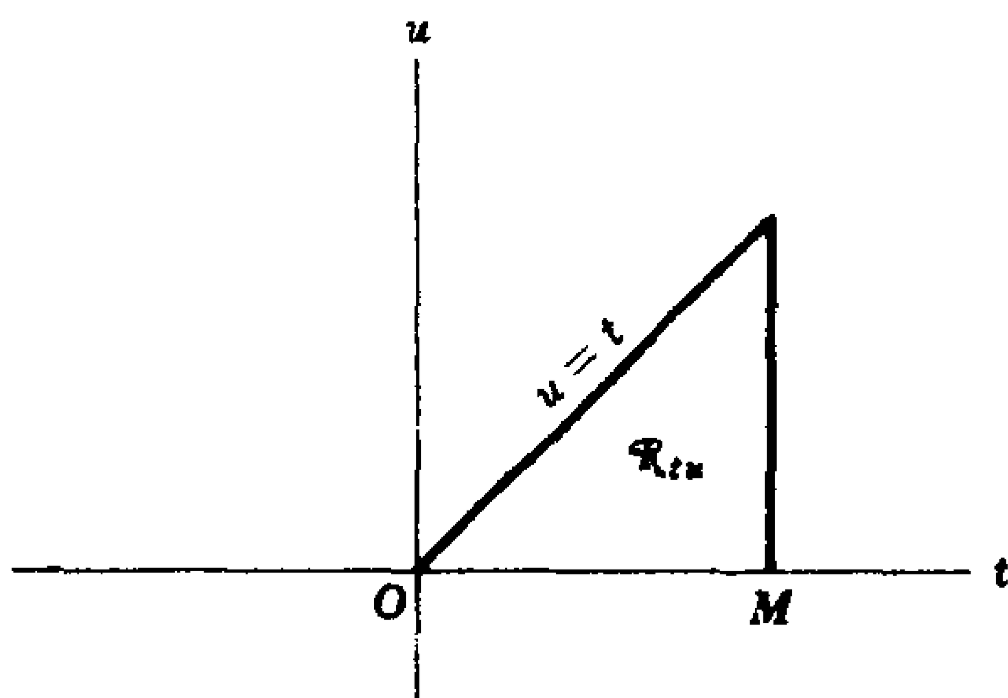


圖 2-1

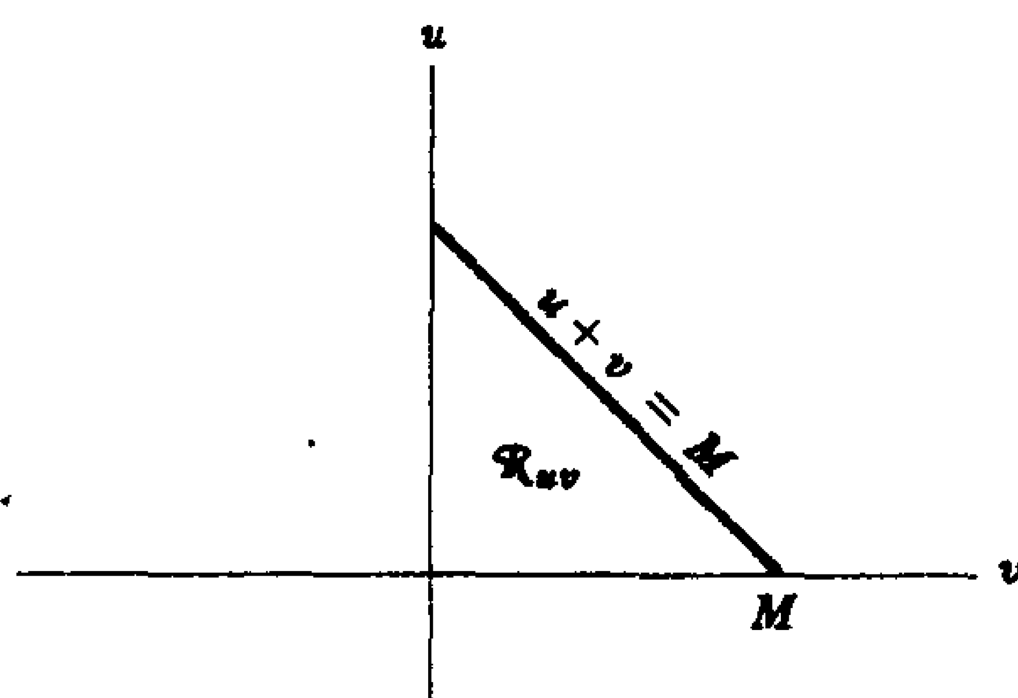


圖 2-2

令 $t-u=v$，即 $t=u+v$，則在 tu 平面上的陰影部分 R_{tu}，可轉換成 uv

平面上的陰影部分 R_{uv}，如圖 2-2 所示。再由多重積分的變數變換定理，可得

$$s_M = \iint_{\mathcal{R}_{tu}} e^{-st} F(u)\, G(t-u)\, du\, dt = \iint_{\mathcal{R}_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v) \left| \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv \qquad (3)$$

其中變數轉換之亞可比行列式（Jacobian of the transformation）爲

$$J = \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

故(3)式的右邊可化成

$$s_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv \qquad (4)$$

在此定義另一新函數

$$K(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v) & 若\ u+v \leqq M \\ 0 & 若\ u+v > M \end{cases} \qquad (5)$$

此函數定義在圖 2-3 所示的正方形中，但由(5)式可知，在方塊中非陰影部分所對應的函數值均爲零。利用此函數，(4)式可改寫爲

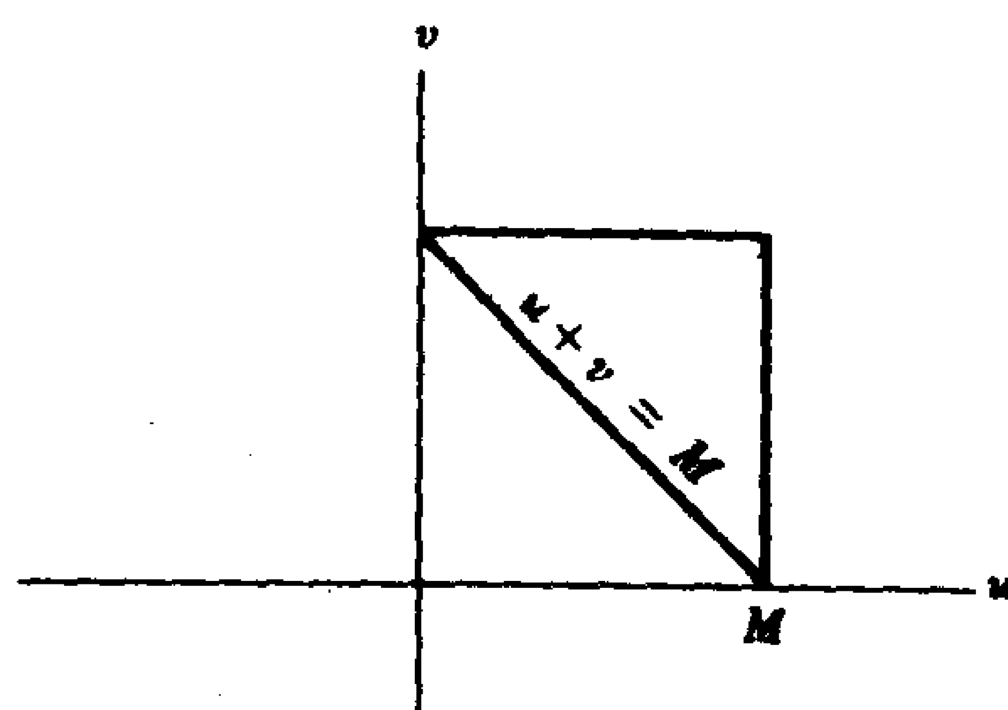


圖 2-3

$$s_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} K(u,v)\, du\, dv$$

故
$$\lim_{M\to\infty} s_M = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(u,v)\, du\, dv$$
$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$
$$= \left\{ \int_0^{\infty} e^{-su} F(u)\, du \right\} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-sv} G(v)\, dv \right\}$$
$$= f(s)\, g(s)$$

故得證！

我們稱 $\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du = F * G$ 爲 F 和 G 的摺積積分 (Convolution integral），或簡稱摺積（Convolution）。

85 題有更直接證明摺積定理的方法。

2.21 證明 $F * G = G * F$。

解 令 $t-u=v$ 即 $u=t-v$，則

$$F*G = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du = \int_0^t F(t-v)\,G(v)\,dv$$
$$= \int_0^t G(v)\,F(t-v)\,dv = G*F$$

由此可知F和G的摺積滿足代數中的交換律 (Commutative law), 而且也滿足結合律 (Associative law) 和分配律 (Distributive law) (可參見 80 及 81 題) 。

2.22 利用摺積定理，計算下列各式。

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$.

解 (a) 可改寫成 $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2} = \dfrac{s}{s^2+a^2}\cdot\dfrac{1}{s^2+a^2}$. 但 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$ 且

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} = \dfrac{\sin at}{a}$，故由摺積定理可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \int_0^t \cos au\cdot\frac{\sin a(t-u)}{a}\,du$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^t (\cos au)(\sin at\cos au - \cos at\sin au)\,du$$
$$= \frac{1}{a}\sin at\int_0^t \cos^2 au\,du - \frac{1}{a}\cos at\int_0^t \sin au\cos au\,du$$
$$= \frac{1}{a}\sin at\int_0^t\left(\frac{1+\cos 2au}{2}\right)du - \frac{1}{a}\cos at\int_0^t \frac{\sin 2au}{2}\,du$$
$$= \frac{1}{a}\sin at\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2at}{4a}\right) - \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$
$$= \frac{1}{a}\sin at\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin at\cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right)$$
$$= \frac{t\sin at}{2a}$$

可和第 13 題比較之。

(b) 因 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = t$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}$，故由摺積定理可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} &= \int_0^t (ue^{-u})(t-u)\,du \\ &= \int_0^t (ut-u^2)\,e^{-u}\,du \\ &= (ut-u^2)(-e^{-u}) - (t-2u)(e^{-u}) + (-2)(-e^{-u})\Big|_0^t \\ &= te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2\end{aligned}$$

驗算：$\mathcal{L}\{te^{-t}+2e^{-t}+t-2\} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}$

$$= \frac{s^2+2s^2(s+1)+(s+1)^2-2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

2.23 證明 $\int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv = \int_0^t (t-u)\,F(u)\,du.$

解 由褶積定理，若 $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$，則

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du\right\} = \mathcal{L}\{t\}\,\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

再利用16題，

$$\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv$$

此結果可寫成

$$\int_0^t \int_0^t F(t)\,dt^2 = \int_0^t (t-u)\,F(u)\,du$$

一般而言，我們可寫成（參見83及84題）

$$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t F(t)\,dt^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,F(u)\,du$$

部分分式

2.24 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

解 解1：$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$

兩邊各乘上 $(s-3)(s+1)$，得

$$3s + 7 = A(s+1) + B(s-3) = (A+B)s + A - 3B$$

比較係數得，$A+B=3$ 且 $A-3B=7$；解得 $A=4$，$B=-1$，

$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-7}{(s-3)(s+1)}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

解 2：(1)式兩邊乘上 $s-3$，並令 $s\to 3$，得

$$\lim_{s\to 3}\frac{3s+7}{s+1} = A + \lim_{s\to 3}\frac{B(s-3)}{s+1} \quad 故 \quad A=4$$

同理，(1)式兩邊乘以 $s+1$，並令 $s\to -1$，得

$$\lim_{s\to -1}\frac{3s+7}{s-3} = \lim_{s\to -1}\frac{A(s+1)}{s-3} + B \quad 故 \quad B=-1$$

由此可得到和解 1 相同的結果。亦可參見第 7 題(c)。

2.25 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$.

解 令

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3} \qquad (1)$$

利用 24 題，解 2 的方法，將(1)式兩邊乘以 $s+1$，並令 $s\to -1$，得

$$A = \lim_{s\to -1}\frac{2s^2-4}{(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{6}$$

將(1)式兩邊乘上 $s-2$，並令 $s\to 2$ 得

$$B = \lim_{s\to 2}\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-3)} = -\frac{4}{3}$$

將(1)式兩邊乘上 $s-3$，並令 $s\to 3$，得

$$C = \lim_{s\to 3}\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)} = \frac{7}{2}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/6}{s+1} + \frac{-4/3}{s-2} + \frac{7/2}{s-3}\right\}$$
$$= -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

亦可使用 24 題解 1 的方法，但却比上法來得繁瑣。只要分母是由不同的線性（一次）因式（Distinct linear factors）所組成，就可用上法來求解。

2.26 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$.

解
$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2} \tag{1}$$

類似25題的程序，可以求得A、B值。

將(1)式兩邊乘上$s+1$，並令$s\to-1$，得

$$A = \lim_{s\to-1}\frac{5s^2-15s-11}{(s-2)^3} = \frac{-1}{3}$$

將(1)式兩邊乘上$(s-2)^3$，並令$s\to 2$，得

$$B = \lim_{s\to2}\frac{5s^2-15s-11}{s+1} = -7$$

但同樣的方法却無法求得C及D。然而，我們已知A、B值，將之代入(1)式，得

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1}+\frac{-7}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2} \tag{2}$$

欲求C、D，我們可將兩不同的值代入s，例如，令$s=0$及$s=1$分別代入上式，可得

$$\frac{11}{8} = -\frac{1}{3}+\frac{7}{8}+\frac{C}{4}-\frac{D}{2}, \qquad \frac{21}{2} = -\frac{1}{6}+7+C-D$$

即$3C-6D=10$，$3C-3D=11$，解得$C=4$，$D=1/3$，故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1}+\frac{-7}{(s-2)^3}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{1/3}{s-2}\right\}$$
$$= -\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}+4te^{2t}+\frac{1}{3}e^{2t}$$

另解：將(2)式兩邊乘上s，並令$s\to\infty$，得$0=-⅓+D$，即$D=⅓$，再令$s=0$，即可求得C。

此法可用於分母出現重覆的線性（一次）因式（Repeated linear factors）時。

2.27 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$.

解
$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1} \tag{1}$$

兩邊乘上 $s-1$，並令 $s\to 1$，得 $A=\lim_{s\to 1}\frac{3s+1}{s^2+1}=2$　代入原式

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{2}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1} \tag{2}$$

欲求 B 及 C，令 $s=0$ 及 2（可選用其他值）代入，則

$$-1=-2+C,\quad \frac{7}{5}=2+\frac{2B+C}{5}$$

得 $C=1$，$B=-2$，故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{-2s+1}{s^2+1}\right\}\\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\\ &= 2e^t-2\cos t+\sin t\end{aligned}$$

另解：將(2)式兩邊乘上 s，並令 $s\to\infty$，立刻可得 $B=-2$。

2.28 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$.

圖　解 1：

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{As+B}{s^2+2s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+5} \tag{1}$$

乘上 $(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)$，得

$$\begin{aligned}s^2+2s+3 &= (As+B)(s^2+2s+5)+(Cs+D)(s^2+2s+2)\\ &= (A+C)s^3+(2A+B+2C+D)s^2+(5A+2B+2C+2D)s+5B+2D\end{aligned}$$

即 $A+C=0,\ 2A+B+2C+D=1,\ 5A+2B+2C+2D=2,\ 5B+2D=3.$ 解之，得 $B=1/3$，$C=0$，$D=2/3$，故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+2s+2}+\frac{2/3}{s^2+2s+5}\right\}\\ &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}+\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}\\ &= \frac{1}{3}e^{-t}\sin t+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\\ &= \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t+\sin 2t)\end{aligned}$$

解 2：令 $s=0$ 代入(1)：$\frac{3}{10}=\frac{B}{2}+\frac{D}{5}$

將(1)式乘上 s，並令 $s\to\infty$：$0=A+C$

令 $s=1$： $\frac{3}{20} = \frac{A+B}{5} + \frac{C+D}{8}$

令 $s=-1$： $\frac{1}{2} = -A + B + \frac{D-C}{4}$

解得 $A=0$，$B=⅓$，$C=0$，$D=⅔$ 和解 1 的值相同。

此法適用於不重覆之二次因式（Non-repeated quadratic factors）

解 3：因 $s^2+2s+2=0$ 之根爲 $s=-1\pm i$，故

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1-i)(s+1+i)$$

同理

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1-2i)(s+1+2i)$$

故

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1-i)(s+1+i)(s+1-2i)(s+1+2i)}$$

$$= \frac{A}{s+1-i} + \frac{B}{s+1+i} + \frac{C}{s+1-2i} + \frac{D}{s+1+2i}$$

解之，得 $A=1/6i$, $B=-1/6i$, $C=1/6i$, $D=-1/6i$. 故其反拉氏變換爲

$$\frac{e^{-(1-i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+i)t}}{6i} + \frac{e^{-(1-2i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+2i)t}}{6i} = \tfrac{1}{3}e^{-t}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) + \tfrac{1}{3}e^{-t}\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}\sin t + \tfrac{1}{3}e^{-t}\sin 2t$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

由此可看出，引進複數，可將不重覆之二次因式化爲不重覆之線性（一次）因式。

黑佛塞展開公式

2.29 證明黑佛塞展開公式（Heaviside's expansion formula）(14)，

答 因 $Q(s)$ 爲具有 n 個不同零點（$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$）的多項式，根據部分分式展開的方法，我們可寫成

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \cdots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} \tag{1}$$

兩邊乘上 $s-\alpha_k$，並令 $s\to\alpha_k$，由羅哈士比托規則可得

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k}\frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = \lim_{s\to\alpha_k}P(s)\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}$$

$$= \lim_{s\to\alpha_k}P(s)\lim_{s\to\alpha_k}\left(\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right) = P(\alpha_k)\lim_{s\to\alpha_k}\frac{1}{Q'(s)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

故(1)式可寫成

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}\frac{1}{s-\alpha_1} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\frac{1}{s-\alpha_k} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}\frac{1}{s-\alpha_n}$$

再取反拉氏變換，即可得證：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}e^{\alpha_n t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$$

2.30 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$.

答 令 $P(s) = 2s^2-4$, $Q(s) = (s+1)(s-2)(s-3) = s^3-4s^2+s+6$, $Q'(s) = 3s^2-8s+1$, $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$. ，故由29題可得

$$\frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} + \frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t} + \frac{P(3)}{Q'(3)}e^{3t} = \frac{-2}{12}e^{-t} + \frac{4}{-3}e^{2t} + \frac{14}{4}e^{3t} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

可和25題比較之。

2.31 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$.

答 令 $P(s) = 3s+1$, $Q(s) = (s-1)(s^2+1) = s^3-s^2+s-1$, $Q'(s) = 3s^2-2s+1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=i$, $\alpha_3=-i$ 其中用到 $s^2+1=(s-i)(s+i)$. 再由黑佛塞展開公式，可得所求結果

$$\frac{P(1)}{Q'(1)}e^{t} + \frac{P(i)}{Q'(i)}e^{it} + \frac{P(-i)}{Q'(-i)}e^{-it} \tag{1}$$

$$= \frac{4}{2}e^{t} + \frac{3i+1}{-2-2i}e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i}e^{-it}$$

$$= 2e^{t} + (-1-\tfrac{1}{2}i)(\cos t + i\sin t) + (-1+\tfrac{1}{2}i)(\cos t - i\sin t)$$

$$= 2e^{t} - \cos t + \tfrac{1}{2}\sin t - \cos t + \tfrac{1}{2}\sin t$$

$$= 2e^{t} - 2\cos t + \sin t$$

可和27題比較之。

觀察(1)式，可發覺其最後兩項為共軛複數，這可節省許多計算過程。

其他函數

2.32 證明 $B(m,n) = \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ ，其中 $m>0$ ，$n>0$ 。

答 考慮 $G(t) = \displaystyle\int_0^t x^{m-1}(t-x)^{n-1}\,dx$

由摺積定理可得

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\{t^{m-1}\}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$
$$= \frac{\Gamma(m)}{s^m}\cdot\frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{s^{m+n}}$$

故 $$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{s^{m+n}}\right\} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,t^{m+n-1}$$

即 $$\int_0^t x^{m-1}(t-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,t^{m+n-1}$$

令 $t = 1$，即可得證。

2.33 證明 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$.

答 由 32 題，可得

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

令 $x = \sin^2\theta$，代入化簡得

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

故得證。

2.34 計算 (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^6\theta\,d\theta$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4\theta\,d\theta$, (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$.

答 (a) 令 $2m-1=4$，$2n-1=6$ 代入 33 題中，亦即以 $m=5/2$，$n=7/2$，代入，可得

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^6\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(7/2)}{2\,\Gamma(6)} = \frac{(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}\cdot(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{3\pi}{512}$$

(b) 因 $\cos\theta$ 對稱於 $\theta = \pi/2$，故

$$\int_0^{\pi} \cos^4\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta$$

令 $2m-1=0$，$2n-1=4$，即 $m=1/2$，$n=5/2$ 代入 33 題，可得

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = 2\left[\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(5/2)}{2\,\Gamma(3)}\right]$$
$$= 2\left[\frac{\sqrt{\pi}\cdot(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2\cdot2\cdot1}\right] = \frac{3\pi}{8}$$

(c) $$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \int_0^{\pi/2}\sin^{-1/2}\theta\cos^{1/2}\theta\,d\theta$$

令 $2m-1=-\frac{1}{2}$ ，$2n-1=1/2$，即 $m=1/4$，$n=3/4$ 代入 33 題，可得

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4)}{2\,\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

其中用到下列等式 $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi/(\sin p\pi)$, $0 < p < 1$.

積分的計算

3.35 計算 $\int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du$.

解 令 $G(t) = \int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du$. 由褶積定理可得

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\{J_0(t)\}\,\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

故

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

即

$$G(t) = \int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du = \sin t$$

2.36 證明 $\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$.

解 令 $G(t) = \int_0^\infty \cos tx^2\,dx$. 取拉氏變換，可得

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt\int_0^\infty \cos tx^2\,dx$$

$$= \int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-st}\cos tx^2\,dt$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{L}\{\cos tx^2\}\,dx = \int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4}\,dx$$

令 $x^2=s\tan\theta$ 即 $x=\sqrt{s}\sqrt{\tan\theta}$，利用 34 題(c)，可化簡爲

$$\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{-1/2}\,d\theta = \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{s}}$$

取反拉氏變換，得

$$G(t) = \int_0^\infty \cos tx^2\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}t^{-1/2}$$

以 $t = 1$ 代入，即得

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

其他各類問題

2.37 證明 $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

答 令 $G(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx$. 取拉氏變換

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^\infty \frac{dx}{s + x^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{s}}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

由取反拉氏變換

$$G(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, t^{-1/2}$$

再令 $t = 1$ 代入，即可得證。

另解：

令 $x^2 = u$ 即 $x = \sqrt{u}$，則原式可化爲

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u}\, du = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

再由 32 題，以 $m = n = \frac{1}{2}$ 代入，得

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2}} = \sin^{-1}(1-2x)\Big|_0^1 = \pi$$

故，原式之値爲 $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$。可參見 29 題。

2.38 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\}$.

答 由 34 題可知，$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ 再對 a 微分，可得

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{d}{da}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\} \quad \text{即} \quad \mathcal{L}\left[\frac{d}{da}\{J_0(at)\}\right] = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\mathcal{L}\{t J_0'(at)\} = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

故 $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}J_0'(at) = \frac{t\,J_1(at)}{a}$$

其中用到$J'_0(u) = -J_1(u)$。

2.39 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s+5)^{3/2}}\right\}$.

答 原式可改寫成

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+4]^{3/2}}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^{3/2}}\right\} = \frac{te^{-t}}{2}J_1(2t)$$

其中用到38題。

2.40 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s}\right\}$.

答 利用無限級數，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}e^{-1/s} &= \frac{1}{s}\left\{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!\,s^2}-\frac{1}{3!\,s^3}+\cdots\right\}\\ &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!\,s^3}-\frac{1}{3!\,s^4}+\cdots\end{aligned}$$

逐項進行反拉氏變換，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}e^{-1/s}\right\} &= 1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}-\frac{t^3}{(3!)^2}+\cdots\\ &= 1-t+\frac{t^2}{1^2 2^2}-\frac{t^3}{1^2 2^2 3^2}+\cdots\\ &= 1-\frac{(2t^{1/2})^2}{2^2}+\frac{(2t^{1/2})^4}{2^2 4^2}-\frac{(2t^{1/2})^6}{2^2 4^2 6^2}+\cdots\\ &= J_0(2\sqrt{t})\end{aligned}$$

2.41 求 $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\}$.

答 令 $y = y = e^{-\sqrt{s}}$ ；則 $y' = -\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2s^{1/2}}$, $y'' = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s}+\frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s^{3/2}}$. 故

$$4s\,y'' + 2y' - y = 0 \tag{1}$$

在此 $y'' = \mathcal{L}\{t^2Y\}$ 故 $sy'' = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}[t^2Y]\right\} = \mathcal{L}\{t^2Y'+2tY\}$. 同理，$y' = \mathcal{L}\{-tY\}$.

故(1)式可寫成

$$4\mathcal{L}\{t^2Y'+2tY\} - 2\mathcal{L}\{tY\} - \mathcal{L}\{Y\} = 0 \quad \text{即} \quad 4t^2Y' + (6t-1)Y = 0$$

再化簡得

$$\frac{dY}{Y} + \left(\frac{6t-1}{4t^2}\right)dt = 0 \quad \text{即} \quad \ln Y + \frac{3}{2}\ln t + \frac{1}{4t} = c_1$$

化簡得

$$Y = \frac{c}{t^{3/2}}e^{-1/4t}$$

乘上 t 得 $tY = \frac{c}{t^{1/2}}e^{-1/4t}$. 故

$$\mathcal{L}\{tY\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Y\} = -\frac{d}{ds}(e^{-\sqrt{s}}) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

當 t 很大時，$tY \sim \frac{c}{t^{1/2}}$ 且 $\mathcal{L}\{tY\} \sim \frac{c\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$. 。當 s 很小時，$\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \sim \frac{1}{2s^{1/2}}$.

故由終值定理 $c\sqrt{\pi} = ½$即 $c = ½\sqrt{\pi}$，故

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-1/4t}$$

另解：利用無限級數，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - s^{1/2} + \frac{s}{2!} - \frac{s^{3/2}}{3!} + \frac{s^2}{4!} - \frac{s^{5/2}}{5!} + \cdots\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}\{s^{1/2}\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{2!}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{3/2}}{3!}\right\} + \cdots \qquad (1)\end{aligned}$$

利用第 1 章 170 題的結果（可參見第 1 章 33 題），當 p 爲正整數或零時，下式成立

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{s^{p+1/2}\} &= \frac{t^{-p-3/2}}{\Gamma(-p-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{2p+1}{2}\right)t^{-p-3/2} \qquad (2)\end{aligned}$$

其中$\mathcal{L}^{-1}\{s^p\} = 0$，利用(2)式代入(1)，即得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} &= \frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{t^{-5/2}}{3!\sqrt{\pi}} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\frac{t^{-7/2}}{5!\sqrt{\pi}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2t}\right) + \frac{(1/2^2t)^2}{2!} - \frac{(1/2^2t)^3}{3!} + \cdots\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-1/4t}\end{aligned}$$

2.42 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\}$.

答 由 41 題及 15 題可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\} = \int_0^t \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,u^{3/2}} e^{-1/4u}\right\} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv \qquad (\text{令} \quad u = 1/4v^2)$$

$$= \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

2.43 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\}$.

答 利用性質(4)的標度改變性質，令 $k = x^2$ 代入 42 題中，得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{x^2 s}}}{x^2 s}\right\} = \frac{1}{x^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t/x^2}}\right)$$

即

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

此即爲公式表的第 87 條。

2.44 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\}$.

答 因 $\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9}\right)$ ，故

$$\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2} - \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2+9}\right\}$$

$$= \frac{1}{9}\left\{\left(2s+10+\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}\right) - \left(2s+10+\frac{-10s-50}{s^2+9}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}+\frac{10s}{s^2+9}+\frac{50}{s^2+9}\right\}$$

所以

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\} = \frac{1}{9}\left(8 + 40t + 10\cos 3t + \frac{50}{3}\sin 3t\right)$$

$$= \frac{1}{27}(24 + 120t + 30\cos 3t + 50\sin 3t)$$

亦可用部分分式的方法來做。

2.45 證明 $J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}\,dw$

答 由第 1 章 34 題可得

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

但

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}$$

再利用 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+a}}\right\}=\frac{t^{-1/2}e^{-at}}{\sqrt{\pi}}$ ，故由摺積定理可得

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}\right\} \\ &= \int_0^t \frac{u^{-1/2}e^{-iu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(t-u)^{-1/2}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2u)}\,u^{-1/2}(t-u)^{-1/2}\,du \end{aligned}$$

令 $u=tv$ 代入得

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{it(1-2v)}\,v^{-1/2}(1-v)^{-1/2}\,dv$$

若令 $1-2v=w$ ，可得

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}\,dw$$

2.46 證明 $J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\,d\theta.$

圖 令 $w=\cos\theta$ 代入 45 題的結果，則

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{it\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\,d\theta + \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \sin(t\cos\theta)\,d\theta$$

令實部和虛部分別相等，可知最後一個積分式爲零，故

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\,d\theta$$

另解：

令 $G(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t\cos\theta)\,d\theta$. 取拉氏變換得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(t)\} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{s}{s^2+\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{s\sec^2\theta}{s^2\tan^2\theta+s^2+1}\,d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\tan^{-1}\left(\frac{s\tan\theta}{\sqrt{s^2+1}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \end{aligned}$$

故得 $G(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\}=J_0(t)$

補充題

反拉氏變換

2.47 計算下列各式

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s+4}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s}{s^2+16}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-12}{s^2+8}\right\}$ (g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$ (i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{12}{4-3s}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2s-5}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^2-4}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-5}{s^2-9}\right\}$ (h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{7/2}}\right\}$ (j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^{4/3}}\right\}$

答 (a) $3e^{-4t}$ (e) $3\cos 2\sqrt{2}\,t - 3\sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}\,t$ (i) $-4e^{4t/3}$

(b) $\frac{1}{2}e^{5t/2}$ (f) $2\cosh 3t - \frac{5}{3}\sinh 3t$ (j) $(t^{-2/3}+3t^{1/3})/\Gamma(\frac{1}{3})$

(c) $8\cos 4t$ (g) $t^4/24$

(d) $3\sin 2t$ (h) $8t^{5/2}/15\sqrt{\pi}$

2.48 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\dfrac{\sqrt{s}-1}{s}\right)^2\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{s(s+1)}\right\}$.

答 (a) $1+t-4t^{1/2}/\sqrt{\pi}$ (b) $1+e^{-t}$

2.49 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{4s^2+25}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+10}{9s^2-16}\right\}$.

答 (a) $\frac{3}{4}\cos 5t/2 - \frac{4}{5}\sin 5t/2$ (b) $\frac{5}{9}\cosh 4t/3 + \frac{5}{6}\sinh 4t/3$

2.50 (a) 證明函數 $F(t)=\begin{cases} t & t\neq 3 \\ 5 & t=3 \end{cases}$ 和 $G(t)=t$ 具有相同的拉氏變換。

(b) 就反拉氏變換的唯一性，討論(a)的意義。

2.51 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{s^2+4}-\dfrac{4s-24}{s^2-16}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^{5/2}}-\dfrac{7}{3s+2}\right\}$.

答 (a) $3\cos 2t - 4\sin 2t - 4\cosh 4t + 6\sinh 4t$

(b) $6t^{1/2}/\sqrt{\pi} - 8t^{3/2}/3\sqrt{\pi} - \frac{7}{3}e^{-2t/3}$

2.52 (a) 若 $F_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\}$, $F_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}$, $F_3(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f_3(s)\}$，且 c_1，c_2，c_3 爲任意常數，證明

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s)+c_2 f_2(s)+c_3 f_3(s)\} = c_1F_1(t)+c_2F_2(t)+c_3F_3(t)$$

說明上式之成立，有何限制條件，(b)將(a)之結果推廣至 n 個變數。

2.53 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3(s^2-1)^2}{2s^5}+\dfrac{4s-18}{9-s^2}+\dfrac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\right\}$.

答 $\frac{1}{2}-t-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{16}t^4+4t^{1/2}/\sqrt{\pi}+8t^{3/2}/3\sqrt{\pi}-4\cosh 3t+6\sinh 3t$

2.54 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^5}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^{5/2}}\right\}$.

答 (a) $\dfrac{e^{-t}}{24}(4t^3-t^4)$, (b) $\dfrac{2t^{1/2}(3-2t)}{3\sqrt{\pi}}$

2.55 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-14}{s^2-4s+8}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s+20}{s^2-12s+32}\right\}$.

答 (a) $e^{2t}(3\cos 2t - 4\sin 2t)$, (b) $2e^{6t}(4\cosh 2t + 7\sinh 2t) = 11e^{8t} - 3e^{4t}$

2.56 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{4s^2+12s+9}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s-2}{3s^2+4s+8}\right\}$.

答 (a) $\frac{3}{4}e^{-3t/2} - \frac{5}{8}te^{-3t/2}$, (b) $\dfrac{e^{-2t/3}}{15}\{25\cos 2\sqrt{5}\,t/3 - 24\sqrt{5}\sin 2\sqrt{5}\,t/3\}$

2.57 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{8s-27}}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2-4s+20}}\right\}$.

答 (a) $t^{-2/3}e^{27t/8}/2\,\Gamma(\frac{1}{3})$, (b) $e^{2t}J_0(4t)$

2.58 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{\sqrt{s+1}}\right\}$.

答 (a) $\begin{cases} t-2 & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ 或 $(t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$, (b) $\begin{cases} 4\sin 2(t-3) & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$ 或 $4\sin 2(t-3)\,\mathcal{U}(t-3)$

(c) $\begin{cases} (t-1)^{-1/2}/\sqrt{\pi} & t>1 \\ 0 & t<1 \end{cases}$ 或 $(t-1)^{-1/2}\,\mathcal{U}(t-1)/\sqrt{\pi}$.

2.59 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}\right\}$.

答 (a) $\begin{cases} 2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)} & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ 或 $\{2e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)}\}\,\mathcal{U}(t-2)$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}e^{(t-3)}\sin 2(t-3) & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$ 或 $\frac{1}{2}e^{(t-3)}\sin 2(t-3)\,\mathcal{U}(t-3)$

2.60 若 $\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s)$ 且 $\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt = f(ps+q)$，其中 p 和 q 都是常數，求 $F(t)$ 和 $G(t)$ 的關係式。 答 $G(t) = e^{-qt/p}F(t/p)/p$

2.61 若 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \operatorname{erf}\sqrt{t}$ 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}\right\}$, $a>0$. 答 $\operatorname{erf}\sqrt{at}/\sqrt{a}$

2.62 若 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_n(t)$ ，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$. 答 $a^nJ_n(at)$

2.63 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{\sqrt{s^2+9}}\right\}$.

答 (a) $e^t\operatorname{erf}\sqrt{t}$, (b) $\begin{cases} J_0(3t-6) & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ 或 $J_0(3t-6)\,\mathcal{U}(t-2)$

導式及積分式的反拉氏變換

2.64 利用定理2-6，求

(a) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^3\}$，但已知 $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$,

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2-a^2)^2\}$，但已知 $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2-a^2)\} = (\sinh at)/a$.

2.65 利用下式 $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\}=1$ 求 $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^n\}$ 其中 $n=2, 3, 4, \cdots$ 進而求出 $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^n\}$。

2.66 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$. 答 $\frac{1}{2}te^{-t}\sin t$

2.67 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right)\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right)\right\}$.

答 (a) $(e^{-t}-e^{-2t})/t$, (b) $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,du$

2.68 求 $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(2/s^2)\}$. 答 $2\sin t\sinh t/t$

2.69 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\}$. 答 $\displaystyle\int_0^t \frac{\cos au-\cos bu}{u}\,du$

乘以及除以 s 的冪次

2.70 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^3}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^v\int_0^w F(u)\,du\,dv\,dw.$

上面之積分式可寫成 $\displaystyle\int_0^t\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^3$ 嗎？解釋之。

2.71 計算 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s+1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)^3}\right\}$.

答 (a) $1-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}$, (b) $\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}e^{-3t}$, (c) $1-e^{-t}(1+t+\frac{1}{2}t^2)$

2.72 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+4}}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$.

答 (a) $\frac{1}{2}\operatorname{erf}(2\sqrt{t})$, (b) $\displaystyle\int_0^t J_0(au)\,du$

2.73 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^5(s+2)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-2)^5(s+1)}\right\}$ 並討論以上兩者之答案有何關係存在。

答 (a) $\dfrac{e^t}{72}\left(t^4-\dfrac{4}{3}t^3+\dfrac{4}{3}t^2-\dfrac{8}{9}t+\dfrac{8}{27}\right)-\dfrac{e^{-2t}}{243}$

(*b*) $e^{2t}\left(\frac{t^4}{36}+\frac{t^3}{54}-\frac{t^2}{54}+\frac{t}{81}-\frac{1}{243}\right)+\frac{e^{-t}}{243}$

2.74 若$F(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$，證明

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f'(s)\} = -t\,F'(t)-F(t)$

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f''(s)\} = t^2F'(t)+2t\,F(t)$

(*c*) $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 f''(s)\} = t^2F''(t)+4t\,F'(t)+2\,F(t)$

2.75 證明 $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 f'(s)+F(0)\} = -t\,F''(t)-2\,F'(t)$.

摺積定理

2.76 利用摺積定理，求 (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$.

答 (*a*) $\frac{1}{4}(e^t-e^{-3t})$, (*b*) $\frac{1}{16}(e^{2t}-e^{-2t}-4te^{-2t})$

2.77 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$. 答 $\frac{1}{2}(\sin t-\cos t+e^{-t})$

2.78 求$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$. 答 $\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$

2.79 求 (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$.

答 (*a*) $\frac{1}{8}\{(3-t^2)\sin t-3t\cos t\}$, (*b*) $\frac{1}{64}t(\sin 2t-2t\cos 2t)$

2.80 證明$F*\{G*H\}=\{F*G\}*H$，亦即證明摺積滿足結合律。

2.81 證明 (*a*) $F*\{G+H\}=F*G+F*H$, (*b*) $\{F+G\}*H = F*H+G*H$.

2.82 證明$1*1*1*\cdots*1$（n個1）$=t^{n-1}/(n-1)!$其中$n=1,2,3,\cdots$

2.83 證明 $\int_0^t\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^3 = \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}F(u)\,du$.

2.84 證明 $\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}F(u)\,du$.

2.85 直接證明下列式子，並藉此證明摺積定理

$$\begin{aligned} f(s)\,g(s) &= \left\{\int_0^\infty e^{-su}F(u)\,du\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sv}G(v)\,dv\right\} \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(u)\,G(v)\,du\,dv \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt. \end{aligned}$$

2.86 由摺積定理證明下式

$$\int_0^t \sin u \cos(t-u)\,du = \tfrac{1}{2}t \sin t$$

2.87 證明
$$\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{e^{(a-b)u}}{\sqrt{u(t-u)}}\,du = e^{(a-b)t/2} I_0\{\tfrac{1}{2}(a-b)t\}.$$

部分分式

2.88 利用部分分式，求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^3-s}\right\}$.

答 (a) $5e^{3t}-2e^{-2t}$, (b) $1-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}$

2.89 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$.

答 (a) $\frac{1}{2}e^{-t/2}-\frac{1}{3}e^{-2t/3}$, (b) $5e^{2t}-\frac{3}{2}e^{t/2}+2e^{-t}$

2.90 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}$.

答 (a) $3e^{-4t}-3\cos 3t$, (b) $\frac{1}{2}\sin 4t+\cos 2t-\sin 2t$

2.91 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$. 答 $\frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t-3\sin t)-\frac{4}{5}e^{-3t}$

2.92 求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}\right\}$.

答 (a) $\frac{1}{2}(2t-1)e^{t}+\frac{3}{2}e^{-t}$, (b) $(5t+3)e^{-2t}-2te^{2t}$

2.93 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$.

答 $\frac{3}{50}e^{3t}-\frac{1}{25}e^{-2t}-\frac{1}{50}e^{-t}\cos 2t+\frac{9}{25}e^{-t}\sin 2t$

2.94 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$. 答 $\frac{1}{2}\sin t \sinh t$

2.95 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$. 答 $\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}t\cos t-te^{-t}$

2.96 利用部分分式來計算(a) 44 題，(b) 71 題，(c) 73 題，(d) 7 題，(e) 77 題。

2.97 79 題(a)及 79 題(b)是否能以部分分式解之？解釋之。

黑佛塞展開公式

2.98 利用黑佛塞展開公式，求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$.

答 (a) $3e^{-2t}-e^{3t}$, (b) $5e^{2t}-3e^{-t}-2e^{-3t}$

2.99 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$. 答 $\frac{1}{2}e^{t}-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}$

2.100 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$. 答 $2e^{-t}+3\sin t-2\cos t$

2.101 利用黑佛塞展開公式求(a) 76 題(a)，(b) 77 題，(c) 88 題，(d) 89 題，(e) 90 題。

2.102 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$ 和 91 題比較之。

2.103 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$ 和 93 題比較之。

2.104 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$ 和 94 題比較之。

2.105 若 $f(s)=P(s)/Q(s)$，其中 $P(s)$ 及 $Q(s)$ 均爲多項式（如同 29 題），但 $Q(s)=0$ 有 m 重根 $s=a$，其他 $s=b_1, b_2\cdots b_n$ 均不相同。

(a) 證明

$$f(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{(s-a)^m}+\frac{A_2}{(s-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_m}{s-a}+\frac{B_1}{s-b_1}+\frac{B_2}{s-b_2}+\cdots+\frac{B_n}{s-b_n}$$

(b) 證明 $A_k=\lim_{s\to a}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^k}{ds^k}\{(s-a)^m f(s)\},\quad k=1,2,\ldots,m.$

(c) 證明 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=e^{at}\left\{\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!}+\frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots+A_m\right\}+B_1e^{b_1t}+\cdots+B_ne^{b_nt}.$

2.106 利用 105 題，求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$.

答 (a) $(3t-2)e^{t}+4e^{-3t}$, (b) $t(e^{-t}-e^{-2t})$

2.107 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^3-47s^2+56s+4}{(s-2)^3(s+2)}\right\}$. 答 $(2t^2-t+5)e^{2t}+6e^{-2t}$

2.108 利用 105 題求(a) 26 題，(b) 44 題，(c) 71 題，(d) 73 題，(e) 76 題(b)。

2.109 利用 105 題的方法，可否求出 79 題(a)及 79 題(b)？解釋之。

2.110 利用 65 題求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$ 和 95 題比較之。

2.111 在分母含重覆之二次因式時，導出黑佛塞展開公式。

2.112 利用 111 題導出之方法，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s^4+5s^3+6s^2+8s+2}{(s-1)(s^2+2s+2)^2}\right\}$

答 $e^t + e^{-t}\{(3-2t)\cos t - 3\sin t\}$

其他函數

2.113 計算下列各式 (a) $\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^2\,dx$, (b) $\int_0^4 x^3(4-x)^{-1/2}\,dx$, (c) $\int_0^2 y^4\sqrt{4-y^2}\,dy$

答 (a) 16/315, (b) 4096/35, (c) 2π

2.114 證明 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$.

2.115 計算下列各式 (a) $\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,d\theta$, (b) $\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^4\theta\,d\theta$, (c) $\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta$.

答 (a) $5\pi/32$, (b) $\pi/32$, (c) $3\pi/128$

2.116 證明

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^p\theta\,d\theta = \begin{cases} (a)\ \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots p}\dfrac{\pi}{2}, & p\text{為正偶數} \\ (b)\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(p-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots p}, & p\text{為正奇數} \end{cases}$$

2.117 已知 $\int_0^\infty \dfrac{x^{p-1}}{1+x}dx = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$，證明 $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ 其中 $0<p<1$。

[提示：令 $x/(1+x)=y$。]

2.118 利用 117 題，證明 $\int_0^\infty \dfrac{y^2\,dy}{1+y^4} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2.119 證明 $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

積分之計算

2.120 證明 $\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$.

2.121 證明 $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,dx$. 答 $\pi/2$

2.122 證明 $\int_0^{\infty} x \cos x^3 \, dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\,\Gamma(1/3)}$.

2.123 證明若 $0 < p < 1$，則 (a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p) \sin(p\pi/2)}$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p) \cos(p\pi/2)}$.

2.124 利用123題之結果，驗證120，121及122題。

2.125 (a) 證明 $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ 收斂

(b) 若 $t > 0$，是否 $\mathcal{L}\left\{\int_0^{\infty} x^2 e^{-tx^2} dx\right\} = \int_0^{\infty} \mathcal{L}\{x^2 e^{-tx^2}\} dx$？

(c) 37題的方法是否可應用於(a)之積分？解釋之。

2.126 計算 $\int_0^t J_0(u) J_1(t-u) \, du$.　答 $J_0(t) - \cos t$

其他各類問題

2.127 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$.　答 $\frac{1}{3}\left\{e^{-t} - e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$

2.128 證明 $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx = (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1)$　其中 $p > -1$，$q > -1$ 且 $b > a$。[提示：令 $x - a = (b-a)y$]

2.129 計算 (a) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$, (b) $\int_1^5 \sqrt[4]{(5-x)(x-1)} \, dx$.　答 (a) π, (b) $\frac{2\{\Gamma(1/4)\}^2}{3\sqrt{\pi}}$

2.130 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$.　答 $\{1-\cos(t-1)\}\,\mathcal{U}(t-1) - \{1-\cos(t-2)\}\,\mathcal{U}(t-2)$

2.131 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$.

2.132 證明 $\int_0^t J_0(u) \sin(t-u) \, du = \frac{1}{2} t J_1(t)$.

2.133 (a)證明函數 $f(s) = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{s}$ 之零點有無限多個（在此 s 爲複數）。這些使 $f(s) = 0$ 之 s 值爲何？(b)求 $f(s)$ 之反拉氏變換。

答 (a) $s = \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ (b) $F(t) = \begin{cases} 1 & t > 2\pi \\ 0 & 0 < t < 2\pi \end{cases}$ or $F(t) = \mathcal{U}(t - 2\pi)$

2.134 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s + \sqrt{s^2+1}}{2s}\right)\right\}$. 答 $\frac{1 - J_0(t)}{t}$

2.135 證明 $\int_0^2 u(8 - u^3)^{1/3}\, du = \frac{16\sqrt{3}\,\pi}{27}$.

2.136 當 t 為無理數時，$F(t) = t^2$；t 為有理數時，$F(t) = t$。

(a) 證明 $L\{F(t)\} = 2/s^3$，$s > 0$。

(b) 由反拉氏變換的唯一性，討論(a)式的意義。

2.137 說明如何應用級數去計算下列各式 (a) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+1)\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1 + 1/s)\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\}$.

2.138 求 $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-3s - 2\sqrt{s}}\}$. 答 $\frac{1}{\sqrt{\pi(t-3)^3}}\, e^{-1/(t-3)}\, \mathcal{U}(t-3)$

2.139 證明 $\int_0^\infty \frac{u \sin tu}{1 + u^2}\, du = \frac{\pi}{2} e^{-t}$, $t > 0$.

2.140 若 $F(t) = t^{-1/2}$, $t > 0$ 且 $G(t) = \begin{cases} t^{-1/2} & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$, 證明

$$F(t) * G(t) = \begin{cases} \pi & 0 < t < 1 \\ \pi - 2\tan^{-1}\sqrt{t-1} & t > 1 \end{cases}$$

2.141 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s+1} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+1} + \sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-t/2}\, I_1(t/2)}{t}$.

2.142 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$. 答 $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} + e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}$

2.143 證明 (a) $\int_0^{\pi/2} \sin(t \sin^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\sin(t/2)\, J_0(t/2)$

(b) $\int_0^{\pi/2} \cos(t \cos^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\cos(t/2)\, J_0(t/2)$.

2.144 若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ 之週期為 $T > 0$，證明

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)(1 - e^{-sT})\} = \begin{cases} F(t), & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

2.145 (a) 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\} = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^{11}}{11!} + \cdots$.

(b) 討論(a)之結果和 127 題有何關聯。

2.146 黑佛塞展開公式是否可用於 $f(s)=1/(s\cosh s)$？解釋之。

2.147 證明 $\int_0^\infty J_0(x^2)\,dx = 1/4\sqrt{\pi}$.

2.148 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\sin\frac{1}{s}\right\} = t - \frac{t^3}{(3!)^2} + \frac{t^5}{(5!)^2} - \frac{t^7}{(7!)^2} + \cdots$$

$$= \frac{i}{2}\{J_0(2e^{\pi i/4}\sqrt{t}) - J_0(2e^{-\pi i/4}\sqrt{t})\}$$

2.149 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cos\frac{1}{s}\right\} = 1 - \frac{t^2}{(2!)^2} + \frac{t^4}{(4!)^2} - \frac{t^6}{(6!)^2} + \cdots$$

2.150 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\sqrt{s}}\right\}$. 答 $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t})$

2.151 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+e^{-s}}\right\} = \sum_{n=0}^{[t]} \frac{(-1)^n (t-n)^n}{n!}$$

其中 $[t]$ 代表小於或等於 t 的最大整數。

2.152 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}J_0\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right)\right\} = 1 - \frac{t}{(1!)^3} + \frac{t^2}{(2!)^3} - \frac{t^3}{(3!)^3} + \cdots$$

第三章
在微分方程式方面的應用

3·1 常係數常微分方程式

拉氏變換常應用於線性之常係數常微分方程式。例如，若我們要解下面的二階線性微分方程式：

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha\frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t) \quad 或 \quad Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t) \tag{1}$$

其中α，β爲常數，乃由起始或邊界條件（Initial or boundary conditions）所決定，

$$Y(0) = A, \qquad Y'(0) = B \tag{2}$$

其中A，B爲已知之常數。將(1)式取拉氏變換，並將(2)式代入，我們可得用以求$\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$的代數方程式。所求之答案即爲$y(s)$的反拉氏變換。此方法可輕易地推廣至高階的微分方程式，參見1～8題。

3·2 變係數常微分方程式

拉氏變換亦可用於某些係數爲變數（Variable）的常微分方程式。若微分方程式中每一項的形式均如下所示，則可以拉氏變換解之。

$$t^m Y^{(n)}(t) \tag{3}$$

其拉氏變換爲

$$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\mathcal{L}\{Y^{(n)}(t)\} \tag{4}$$

可參見第1章定理1-10及定理1-12。

詳細解答過程，見9～11題。

3・3 聯立常微分方程式

拉氏變換亦可用於兩個（或兩個以上）聯立常微分方程式，其過程和前面所講的方法是相同的．參見12及13題。

3・4 在力學方面的應用

假定一質量m，連接至一固定於O的彈簧，且m可在無摩擦的平面PQ上自由滑動。若$X(t)$（或直接寫成X）代表質量m在時間t-時，相對於平衡點或靜止點（Equilibrium or rest position）的位移，則存在一回復力（Restoring force）作用於m，其大小為$-kX$，其中k為依彈簧而變的常數稱為彈簧常數（spring constant）。以上稱為虎克定律（Hooke's law），乃是根據實驗而得，它說明彈簧的回復力正比於彈簧自平衡點伸展（或壓縮）的程度。再由牛頓定理（Newton's law），即作用於m的淨力等於質量和加速度的乘積，我們可得運動方程式如下：

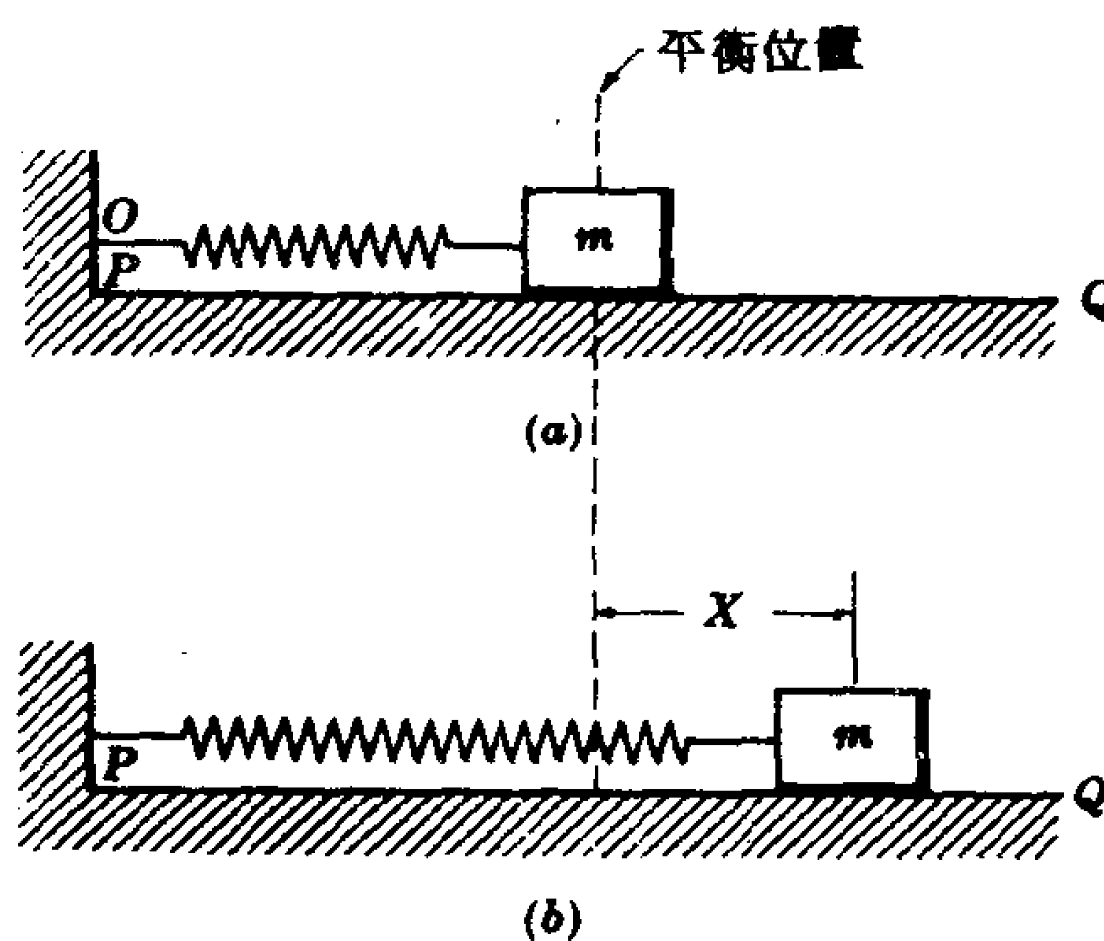


圖 3-1

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \qquad \text{或} \qquad mX'' + kX = 0 \tag{5}$$

若存在一個正比於m之瞬時速度的阻滯力（Damping force），則運動方程式變為

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt} \qquad \text{或} \qquad mX'' + \beta X' + kX = 0 \tag{6}$$

其中比例常數β稱為阻滯常數（Damping constant）

若某些隨時間而變的外力$F(t)$亦作用於m，則須將運動方程式修正如下：

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt} + \mathcal{F}(t) \qquad \text{或} \qquad mX'' + \beta X' + kx = \mathcal{F}(t) \tag{7}$$

將拉氏變換應用於(5)，(6)或(7)式，並代入適當的起始條件（和物理性質有關），則可解得$X(t)$。參見14，15，27及28題。

3·5 在電路方面的應用

圖 3-2 爲一簡單的電路，包含一個開關或按鍵（Switch or key）K，如以下各電路元件（Circuit elements）的串聯（Series）：

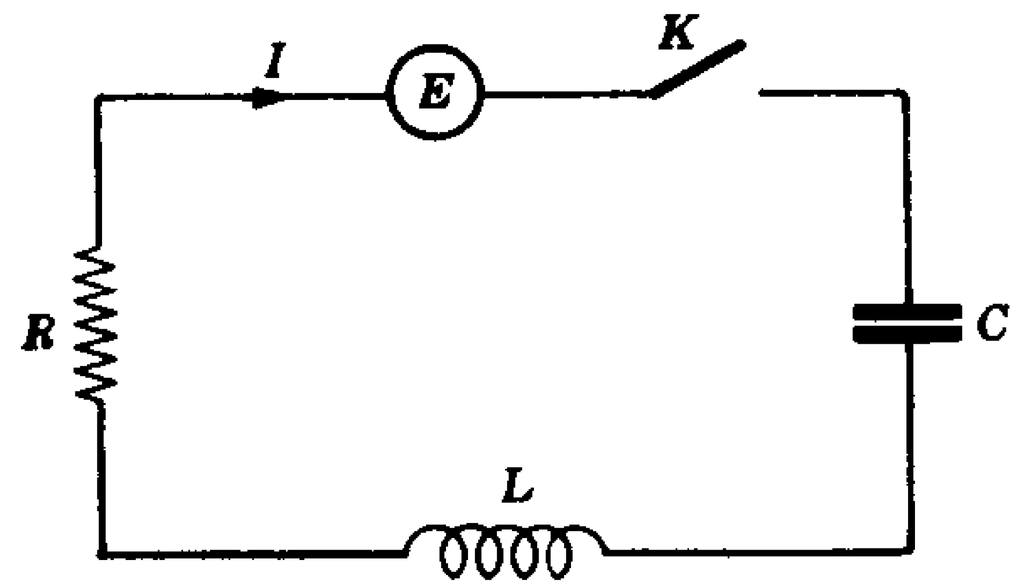


圖 3-2

1. 一個電源（Generator）或電池（Battery），供應電動勢（Electromotive force）或 e.m.f.，以 E（伏特，volts）表之，
2. 一個電阻（Resistor），具有電阻值（Resistance）R（歐姆，ohms），
3. 一個電感（Inductor），具有電感值（Inductance）L（亨利，henrys），
4. 一個電容（Capacitor），具有電容值（Capacitance）C（法拉，farads）。

電路元件以符號表示，如圖 3-2 所示。

當開關或按鍵 K 按下時，電路導通，電荷 Q（庫侖，Coulombs）將流至電容板，其電荷對時間之變率，寫成 $\dfrac{dQ}{dt}=I$，稱爲電流（Current），其中 I 的單位爲安培（Amperes），而 t 以秒爲單位。

較複雜之電路，如圖 3-3 所示，亦可能在實際狀況中碰到。

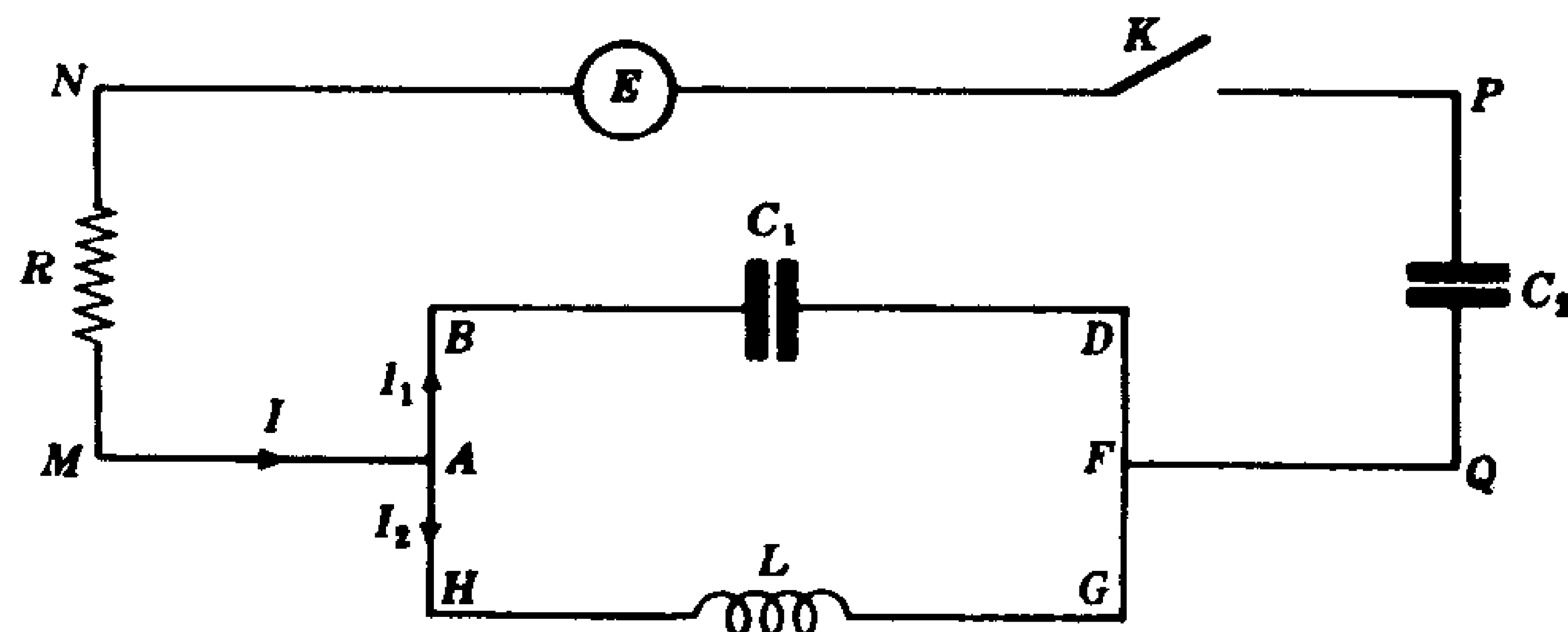


圖 3-3

在一電路中，最重要的是要知道電容上面電荷的大小，及電流隨時間而變的情形。我們定義橫跨於一電路元件的電位差（Potential drop）或電壓降（Voltage drop，簡稱壓降）如下：

(1)　電阻的壓降 $= RI = R\dfrac{dQ}{dt}$

(2)　電感的壓降 $= L\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$

(3)　電容的壓降 $= \dfrac{Q}{C}$

(4)　電源的壓降 $=$ －壓升 $= -E$

相關的微分方程式則可由克希荷夫定律導出。

克希荷夫定律

1. 流入任何接點（例如圖 3-3 的 A 點）的電流代數和爲零。
2. 任何閉迴路（例如圖 3-3 的 $ABDFGHA$ 或 $ABDFQPNMA$）的壓降代數和爲零。

以圖 3-2 的電路爲例，應用此定律是非常容易的（第一定律在此例是多餘的）。利用第二定律，可得 Q 的微分方程式：

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \tag{8}$$

將此定律應用在圖 3-3 的電路，可得兩個聯立方程式（見 17 題）。

由上可發現到(7)式和(8)式的相關性，比較後可明顯看出質量 m 對應於電感 L，位移 X 對應於電荷 Q，阻滯因素 β 對應於電阻 R，彈性常數對應於電容之倒數 $1/C$；施力 F 對應於電動勢 E。此種類比在實用上很方便。

3-6　橫樑方面的應用

假設有一橫樑和 X 軸重合，且其端點在 $x = 0$ 及 $x = L$。（圖 3-4）。若有一負載垂直施於橫樑，其大小爲每單位長 $W(x)$，則此橫樑的軸在點 x 時會產生向下的偏移 $Y(x)$，並滿足下列微分方程式：

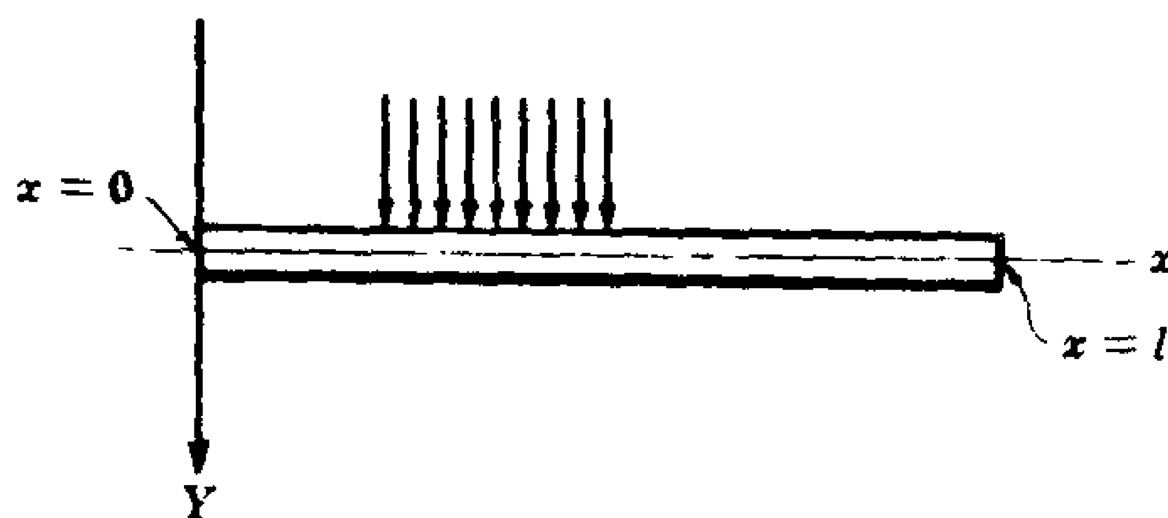


圖 3-4

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \qquad 0 < x < l \tag{9}$$

此種橫向的偏移稱爲撓度曲線(Deflection curve)或彈性曲線(Elastic curve)。EI 稱爲橫樑之彎度剛性(Flexural rigidity),且我們假設其值爲常數(事實上,E 是橫樑的楊氏彈性係數,Young's modulus of elasticity,而 I 爲橫樑橫切面對軸所產生的慣性矩。$EIY''(x)$ 及 $EIY'''(x)$ 分別稱爲在 x 的彎矩(Bending moment)及垂直剪力(Vertical shear)。注意在此定義 y 軸向下爲正,故偏移向下爲正。

(9)式微分方程式的邊界條件,依橫樑被支承的方式而有不同。最常見的情形如下:

1. 固定支承(Clamped, Built-in or Fixed End):$Y = Y' = 0$
2. 鉸支承(Hinged or Simply-Supported End):$Y = Y'' = 0$
3. 自由端(Free End):$Y'' = Y''' = 0$

3-7 偏微分方程式

拉氏變換亦可應用於各種受制於邊界條件的偏微分方程式。此類問題多稱爲**邊界值問題**(Boundary-value problems)。在本章中,我們將會碰到幾題較簡單的這類問題(參見 22～26 題及 31題)。第 8 章對於邊界值問題有較完整的討論,其中亦使用到第 6 章所提到的複數反變換公式。

附解題

常係數常微分方程式

3.1 解 $Y'' + Y = t,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = -2.$

圖 對微分方程式取拉氏變換,並代入已知條件,得

$$\mathcal{L}\{Y''\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t\}, \qquad s^2y - sY(0) - Y'(0) + y = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2y - s + 2 + y = \frac{1}{s^2}$$

即
$$\begin{aligned} y = \mathcal{L}\{Y\} &= \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \end{aligned}$$

故
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right\} = t + \cos t - 3\sin t$$

驗算：$Y = t + \cos t - 3\sin t,\ Y' = 1 - \sin t - 3\cos t,\ Y'' = -\cos t + 3\sin t.\quad Y'' + Y = t,$ $Y(0) = 1,\ Y'(0) = -2$ 故所得即爲正確答案。

亦可利用摺積積分解之，見第 7 題（令 $a = 1$，$F(t) = t$）。

3.2 解 $Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t},\ Y(0) = -3,\ Y'(0) = 5.$

圖 取拉氏變換 $\mathcal{L}\{Y''\} - 3\mathcal{L}\{Y'\} + 2\mathcal{L}\{Y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} - 3\{sy - Y(0)\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$\{s^2y + 3s - 5\} - 3\{sy + 3\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$y = \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{14-3s}{s^2-3s+2}$$

$$= \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

故 $$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right\} = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

讀者可自行帶入驗算。

3.3 解 $Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t}\sin t,\ Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1.$

圖 取拉氏變換 $\mathcal{L}\{Y''\} + 2\mathcal{L}\{Y'\} + 5\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}$

$$\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + 2\{sy - Y(0)\} + 5y = \frac{1}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$\{s^2y - s(0) - 1\} + 2\{sy - 0\} + 5y = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$(s^2+2s+5)y - 1 = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$y = \frac{1}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$= \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

故［見第 2 章，28 題］

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

3.4 解 $Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2e^t,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 0,\ Y''(0) = -2.$

圖 取拉氏變換 $\mathcal{L}\{Y'''\} - 3\mathcal{L}\{Y''\} + 3\mathcal{L}\{Y'\} - \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t^2e^t\}$

$$\{s^3y - s^2Y(0) - sY'(0) - Y''(0)\} - 3\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + 3\{sy - Y(0)\} - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

故 $$(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$y = \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{s^2 - 2s + 1 - s}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{(s-1)^2 - (s-1) - 1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

即 $$Y = e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}$$

3.5 求第 4 題微分方程式的通解。

圖 若起始條件任意給定，即假設 $Y(0) = A,\ Y'(0) = B,\ Y''(0) = C$，則利用相同方法可得

$$(s^3y - As^2 - Bs - C) - 3(s^2y - As - B) + 3(sy - A) - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

即 $$y = \frac{As^2 + (B-3A)s + 3A - 3B + C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

因爲 A、B、C 之值爲任意給定，故等號右式第一項的分子也是任意給定，所以我們可字成

$$y = \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

取反拉氏變換可得

$$y = \frac{c_1t^2}{2}e^t + c_2te^t + c_3e^t + \frac{t^5e^t}{60}$$

$$= c_4t^2 + c_5te^t + c_6e^t + \frac{t^5e^t}{60}$$

其中 c_k's 爲任意給定之常數。

由上可知，求通解要比求特解來得容易，因爲我們可免去計算部分分式展開後的常數值。

3.6 解 $Y'' + 9Y = \cos 2t$，已知 $Y(0) = 1,\ Y(\pi/2) = -1.$

圖 因 $Y'(0)$ 未知，令 $Y'(0) = c$，則

$$\mathcal{L}\{Y''\} + 9\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

$$s^2y - sY(0) - Y'(0) + 9y = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2+9)y - s - c = \frac{s}{s^2+4}$$

即
$$y = \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$
$$= \frac{s}{s^2+9} + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)} - \frac{s}{5(s^2+9)}$$
$$= \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)}$$

故
$$Y = \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{c}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

欲求 c，可由 $Y(\pi/2)=-1$，故 $-1=-c/3-1/5$，即 $c=12/5$，代入得

$$Y = \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{4}{5}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

3.7 解 $Y''+a^2Y=F(t),\ Y(0)=1,\ Y'(0)=-2.$

圖 取拉氏變換 $\mathcal{L}\{Y''\} + a^2\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$

$$s^2y - sY(0) - Y'(0) + a^2y = f(s)$$
$$s^2y - s + 2 + a^2y = f(s)$$

即
$$y = \frac{s-2}{s^2+a^2} + \frac{f(s)}{s^2+a^2}$$

利用摺積定理，

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+a^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2+a^2}\right\}$$
$$= \cos at - \frac{2\sin at}{a} + F(t) * \frac{\sin at}{a}$$
$$= \cos at - \frac{2\sin at}{a} + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sin a(t-u)\,du$$

注意在此題中，$F(t)$ 的拉氏變換並不包含在最後的答案中。

3.8 求 $Y''-a^2Y=F(t)$ 的通解。

圖 令 $Y(0)=c_1$，$Y'(0)=c_2$，再取拉氏變換，得

$$s^2y - sc_1 - c_2 - a^2y = f(s)$$

即
$$y = \frac{sc_1+c_2}{s^2-a^2} + \frac{f(s)}{s^2-a^2}$$

故
$$Y = c_1\cosh at + \frac{c_2}{a}\sinh at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sinh a(t-u)\,du$$

$$= A\cosh at + B\sinh at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sinh a(t-u)\,du$$

此即爲所求的通解。

變係數常微分方程式

3.9 解 $tY'' + Y' + 4tY = 0,\ Y(0) = 3,\ Y'(0) = 0.$

圖 取拉氏變換 $\mathcal{L}\{tY''\} + \mathcal{L}\{Y'\} + \mathcal{L}\{4tY\} = 0$

即 $$-\frac{d}{ds}\{s^2y - sY(0) - Y'(0)\} + \{sy - Y(0)\} - 4\frac{dy}{ds} = 0$$

化簡得 $$(s^2+4)\frac{dy}{ds} + sy = 0$$

故 $$\frac{dy}{y} + \frac{s\,ds}{s^2+4} = 0$$

積分得 $\ln y + \frac{1}{2}\ln(s^2+4) = c_1$ 或 $y = \dfrac{c}{\sqrt{s^2+4}}$

取反拉氏變換得 $$Y = cJ_0(2t)$$

欲求 c，可由 $Y(0) = cJ_0(0) = c = 3$. 故

$$Y = 3J_0(2t)$$

3.10 解 $tY'' + 2Y' + tY = 0,\ Y(0+) = 1,\ Y(\pi) = 0.$

圖 令 $Y'(0+) = c$，取各項之拉氏變換，得

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - sY(0+) - Y'(0+)\} + 2\{sy - Y(0+)\} - \frac{d}{ds}y = 0$$

即 $$-s^2y' - 2sy + 1 + 2sy - 2 - y' = 0$$

化簡得 $-(s^2+1)y' - 1 = 0$ 或 $y' = \dfrac{-1}{s^2+1}$

積分得 $$y = -\tan^{-1}s + A$$

當 $s\to 0$，$y\to 0$，故 $A = \pi/2$，代入得

$$y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

由第1章定理1-13之後的例子，可知

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\sin t}{t}$$

且Y滿足$Y(\pi)=0$，故爲所求之答案。

3.11 解 $Y''-tY'+Y=1,\ Y(0)=1,\ Y'(0)=2.$

圖 取拉氏變換 $\mathcal{L}\{Y''\}-\mathcal{L}\{tY'\}+\mathcal{L}\{Y\}=\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$

即 $$s^2y-sY(0)-Y'(0)+\frac{d}{ds}\{sy-Y(0)\}+y=\frac{1}{s}$$

化簡得 $$s^2y-s-2+sy'+y+y=\frac{1}{s}$$

故 $$sy'+(s^2+2)y=s+2+\frac{1}{s}$$

即 $$\frac{dy}{ds}+\left(s+\frac{2}{s}\right)y=1+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}$$

存在一積分因式爲 $e^{\int(s+\frac{2}{s})ds}=e^{\frac{1}{2}s^2+2\ln s}=s^2e^{\frac{1}{2}s^2}.$

故 $$\frac{d}{ds}\{s^2e^{\frac{1}{2}s^2}y\}=\left(1+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right)s^2e^{\frac{1}{2}s^2}$$

積分得
$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\int\left(1+\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right)s^2e^{\frac{1}{2}s^2}ds\\&=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\int(s^2+2s+1)e^{\frac{1}{2}s^2}ds\\&=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}[se^{\frac{1}{2}s^2}+2e^{\frac{1}{2}s^2}+c]\\&=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{c}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\end{aligned}$$

欲求c，可由級數展開如下：

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{c}{s^2}(1-\tfrac{1}{2}s^2+\tfrac{1}{8}s^4-\cdots)\\&=\frac{1}{s}+\frac{c+2}{s^2}-c(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}s^2+\cdots)\end{aligned}$$

因 $\mathcal{L}^{-1}\{s^k\}=0,\ k=0,1,2,\ldots$，故取反拉氏變換

$$Y=1+(c+2)t$$

但$Y'(0)=2$，故$c=0$因此可得答案如下：

$$Y=1+2t$$

聯立常微分方程式

3.12 解 $\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 2X - 3Y \\ \dfrac{dY}{dt} = Y - 2X \end{cases}$ 已知 $X(0) = 8,\ Y(0) = 3.$

答 取拉氏變換，並令 $\mathcal{L}\{X\} = x,\ \mathcal{L}\{Y\} = y,$

$$sx - 8 = 2x - 3y \quad 即 \quad (1) \quad (s-2)x + 3y = 8$$
$$sy - 3 = y - 2x \quad 即 \quad (2) \quad 2x + (s-1)y = 3$$

解(1)及(2)，得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

故
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

3.13 解 $\begin{cases} X'' + Y' + 3X = 15e^{-t} \\ Y'' - 4X' + 3Y = 15\sin 2t \end{cases}$ 已知 $X(0) = 35,\ X'(0) = -48,\ Y(0) = 27,$ $Y'(0) = -55.$

答 取拉氏變換，得

$$s^2x - s(35) - (-48) + sy - 27 + 3x = \frac{15}{s+1}$$
$$s^2y - s(27) - (-55) - 4\{sx - 35\} + 3y = \frac{30}{s^2+4}$$

即
$$(s^2+3)x + sy = 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \qquad (1)$$
$$-4sx + (s^2+3)y = 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} \qquad (2)$$

解(1)及(2)，得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} & s \\ 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{35s^3 - 48s^2 + 300s - 63}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{15(s^2+3)}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} - \frac{30s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$= \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} \\ -4s & 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{27s^3 - 55s^2 - 3s - 585}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{60s}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{30(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$= \frac{30s}{s^2+9} - \frac{60}{s^2+1} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}$$

故
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t$$
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 30\cos 3t - 60\sin t - 3e^{-t} + \sin 2t$$

在力學方面的應用

3.14 一個質量爲 2 公克的質點 P 在 X 軸上移動，它受到一個朝向原點的力，其大小爲 $8X$。若 P 原先靜止於 $X = 10$，求出其後任意時刻 P 的位置爲何？但假設(a)無其他外力，(b)存在一阻滯力，其大小爲 P 之瞬時速度的 8 倍。

解 (a) 取向右爲正（見圖 3-5）。當 $X > 0$，淨力向左（即爲負），故爲 $-8X$。當 $X < 0$，淨力向右（即爲正），故亦爲 $-8X$。在以上兩種情況中，淨力均爲 $-8X$，故由牛頓定律

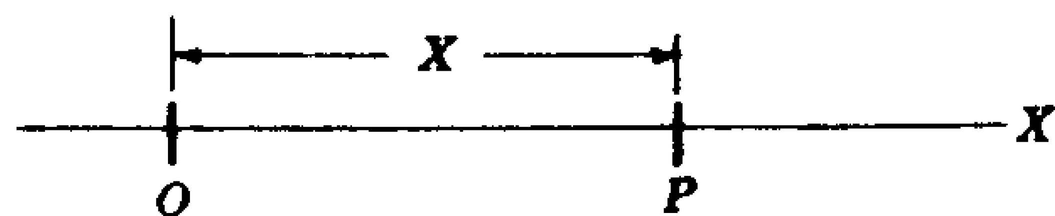


圖 3-5

（質量）·（加速度）= 淨力

$$2 \cdot \frac{d^2X}{dt^2} = -8X$$

即 $$\frac{d^2X}{dt^2} + 4X = 0 \qquad (1)$$

起始條件爲：(2) $X(0) = 10$, (3) $X'(0) = 0$.

取(1)式之拉氏變換，並代入(2)及(3)，可得（令 $x = \mathcal{L}\{X\}$），

$$s^2x - 10s + 4x = 0 \quad 或 \quad x = \frac{10s}{s^2+4}$$

故 $$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t$$

此運動之圖形如圖 3-6 所示，其振幅（Amplitude，自 0 點算起之最大位移）爲 10，週期（Period，一循環所需時間）爲 π，頻率（Frequency，每秒內的循數）爲 $1/\pi$。

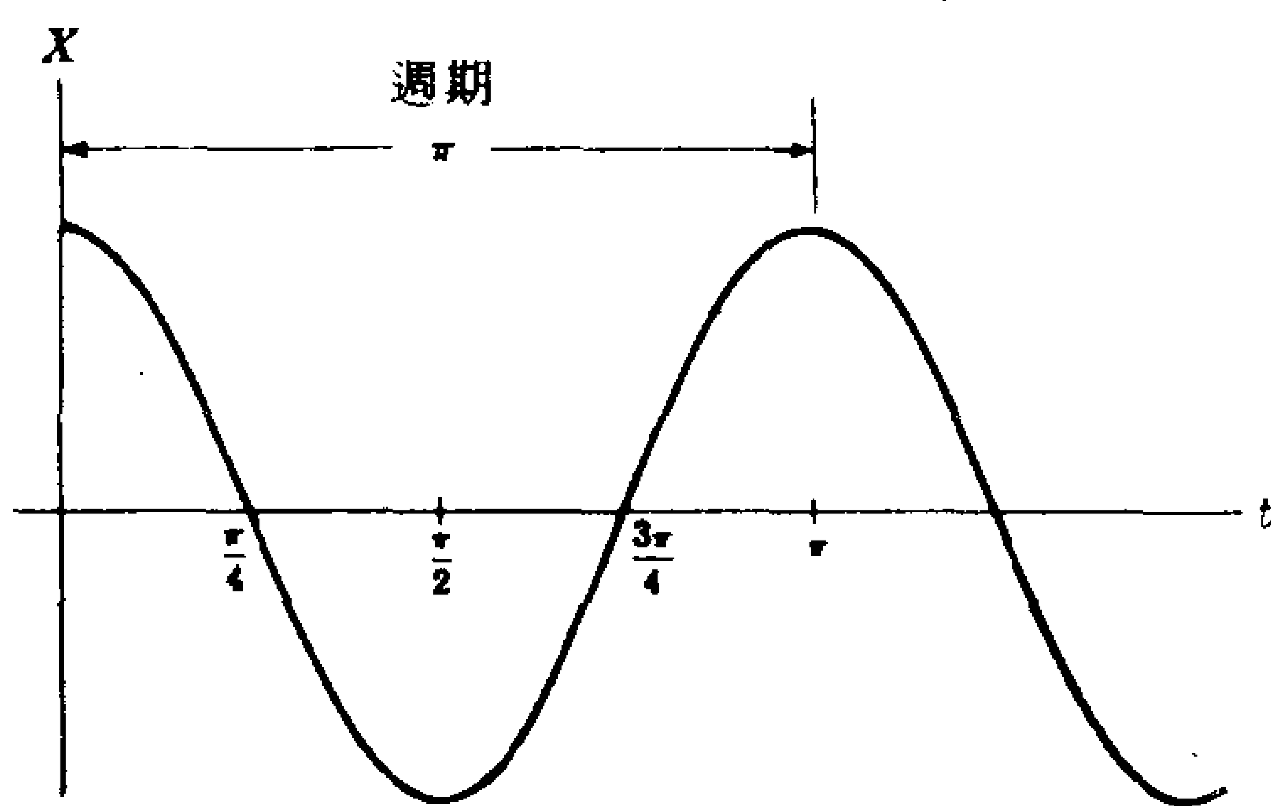


圖 3-6

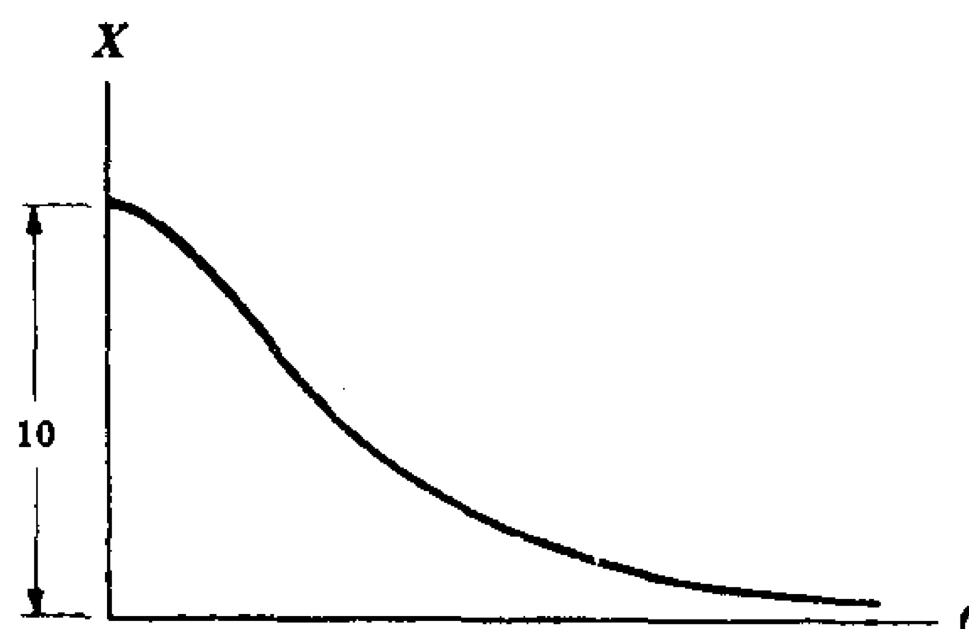


圖 3-7

(b) 當 $X>0$ 且 $dX/dt>0$ 時，P 在O的右方，且向右移動，故阻滯力向左（爲負），其值爲 $-8\,dX/dt$。同理，當 $X<0$ 且 $dX/dt<0$ 時，P 在左方，且向左移動，故阻滯力向右（爲正），其值爲 $-8\,dX/dt$。當 $X>0$，$dX/dt<0$ 或 $X<0$，$dX/dt>0$ 時，阻滯力均爲 $-8\,dX/dt$，由

（質量）·（加速度）＝淨力

得 $$2\frac{d^2X}{dt^2} = -8X - 8\frac{dX}{dt}$$

即 $$\frac{d^2X}{dt^2} + 4\frac{dX}{dt} + 4X = 0 \qquad (4)$$

而起始條件爲 (5) $X(0) = 10$, (6) $X'(0) = 0$.

取(4)式之拉氏變換，並代入(5)及(6)，可得

$$s^2x - 10s + 4(sx - 10) + 4x = 0$$

即 $$x = \frac{10s + 40}{s^2 + 4s + 4}$$

故 $X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+40}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10(s+2)+20}{(s+2)^2}\right\}$

$$= 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 20\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$= 10e^{-2t} + 20te^{-2t} = 10e^{-2t}(1+2t)$$

X對 t 的圖形如圖3-7所示。注意此運動爲**不振盪**（Non-oscillatory）質點P會接近O，但却永遠無法到達。

3.15 一質量爲m的質點在X軸上移動，且受到一向原點O的吸引力kx，$k>0$。質點亦受到一阻滯力$\beta\, dX/dt$，$\beta>0$。在各種情形下，討論質點如何運動（但已知$X(0)=X_0$，$X'(0)=V_0$）。

解 運動方程式爲

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt}$$

即
$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\alpha\frac{dX}{dt} + \omega^2 X = 0 \qquad (1)$$

其中 $\alpha = \beta/2m,\ \omega^2 = k/m.$

取(1)式之拉氏變換，並代入起始條件，可得

$$s^2x - X_0s - V_0 + 2\alpha(sx - X_0) + \omega^2 x = 0$$

即
$$x = \frac{sX_0 + (V_0 + 2\alpha X_0)}{s^2 + 2\alpha s + \omega^2}$$

$$= \frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$$

情況 1，$\omega^2 - \alpha^2 > 0$。

在此情況下，

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = X_0 e^{-\alpha t}\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t + \frac{(V_0+\alpha X_0)}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t$$

此運動稱爲**阻滯振盪**（Damped Oscillatory）（見圖3-8）。質點以O爲中心來振盪，而且振幅漸次減小。振盪週期爲$2\pi/\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$，頻率爲$\sqrt{\omega^2-\alpha^2}/2\pi$。$\omega/2\pi$（對應於$\alpha=0$，即無阻滯）稱爲**自然頻率**（Natural frequency）。

情況 2，$\omega^2 - \alpha^2 = 0$

在此情況下，

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X_0}{s+\alpha} + \frac{V_0+\alpha X_0}{(s+\alpha)^2}\right\}$$

$$= X_0 e^{-\alpha t} + (V_0 + \alpha X_0) t e^{-\alpha t}$$

在此質點並不對O點振盪，它接近O點，但却永遠無法到達。此運動稱爲**臨界阻滯運動**（Critically damped motion），因爲若阻滯常數 β 再減小一點，就會產生振盪（見圖3-9）。

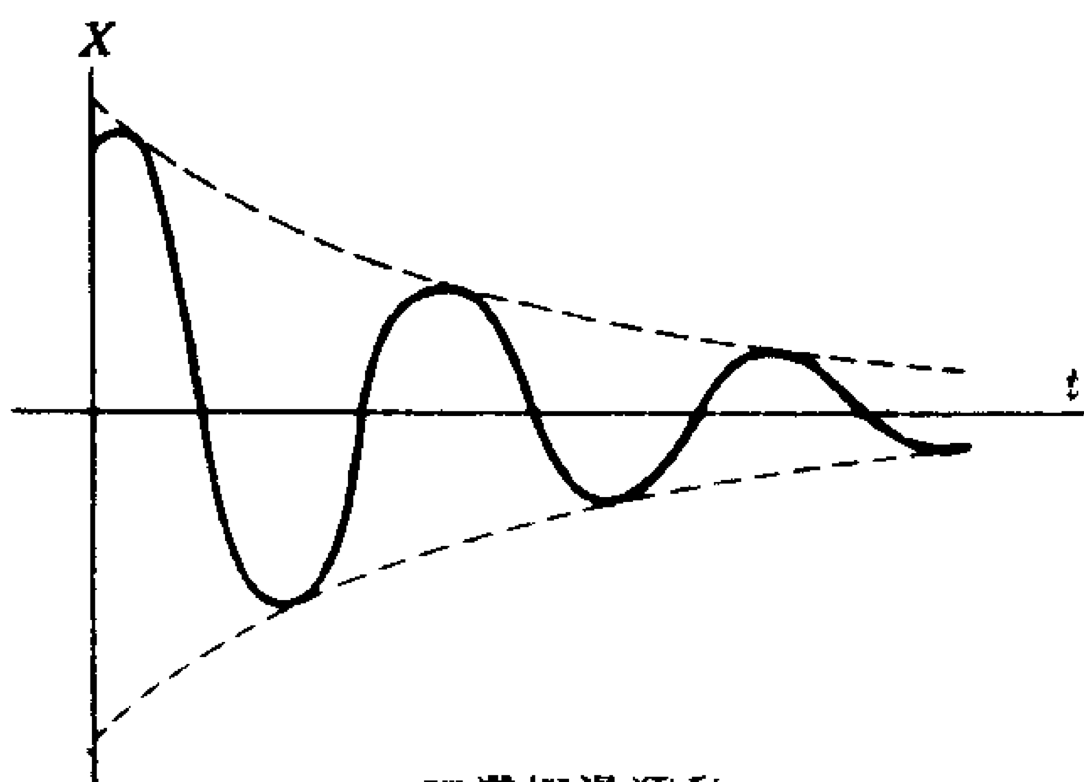
情況3，$\omega^3 - \alpha^2 < 0$

在此情況下，

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)}\right\}$$

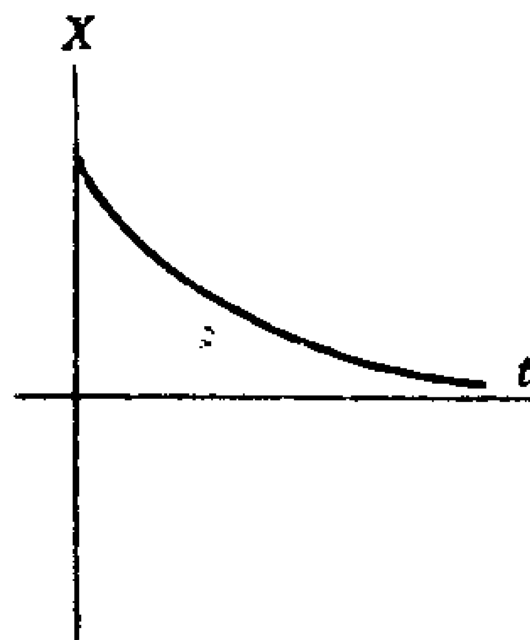
$$= X_0 \cosh\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\, t + \frac{V_0 + \alpha X_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \sinh\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\, t$$

此運動稱爲**過阻滯運動**（overdamped motion），是不會振盪的。其圖形和臨界阻滯運動很相似（見圖3-10）。



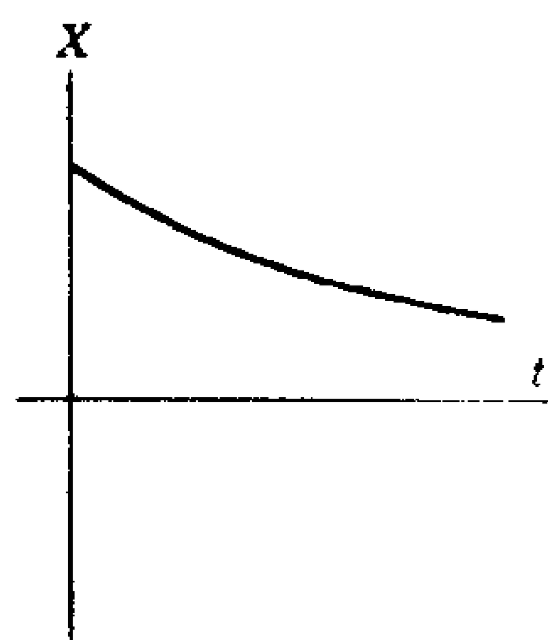
阻滯振盪運動

圖 3-8



臨界阻滯運動

圖 3-9



過阻滯運動

圖 3-10

在電路方面的應用

3.16 有一電感大小爲2亨利，一電阻爲16歐姆，及一電容爲0.02法拉，將以上三元件串聯，並加上一電動勢 E 伏特。在 $t = 0$ 時，電容中的電荷及電路中的電流均爲零。若(a) $E = 300$（伏特），(b) $E = 100 \sin 3t$（伏特），求出在任意時間 $t > 0$ 時，電荷及電流大小爲何。

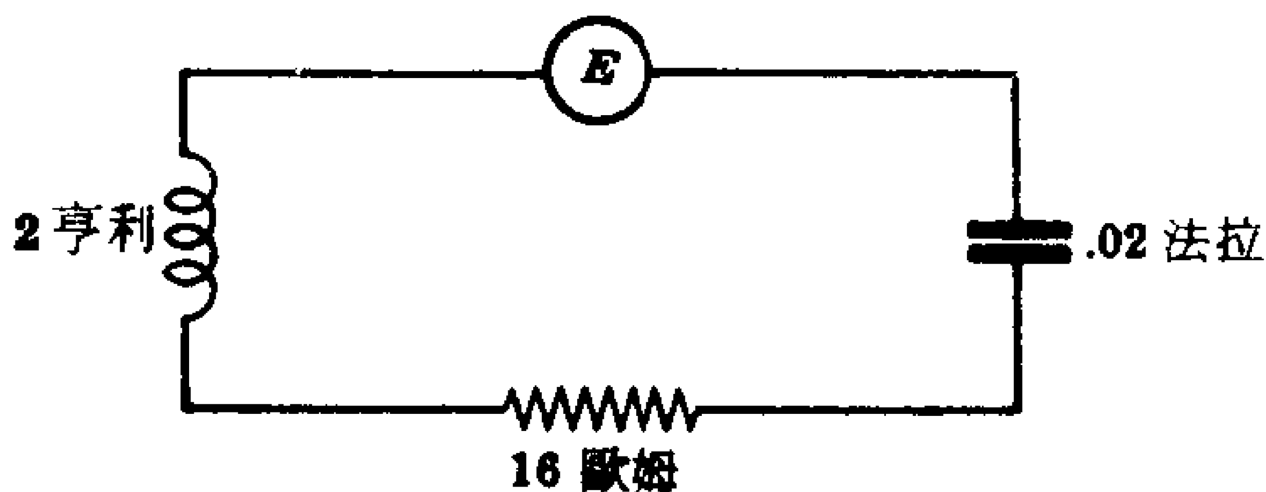


圖 3-11

答 令Q及I代表在時間t時，瞬時的電荷及電流。由克希荷夫定律可得

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{.02} = E$$

但$I = dQ/dt$，故

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + 50Q = E$$

起始條件爲 $Q(0) = 0,\ I(0) = Q'(0) = 0.$

(a) 若$E = 300$，則(2)變爲

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 150$$

取拉氏變換得

$$\{s^2q - s\,Q(0) - Q'(0)\} + 8\{sq - Q(0)\} + 25q = \frac{150}{s}$$

即
$$\begin{aligned} q &= \frac{150}{s(s^2+8s+25)} = \frac{6}{s} - \frac{6s+48}{s^2+8s+25} \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)+24}{(s+4)^2+9} \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{24}{(s+4)^2+9} \end{aligned}$$

故
$$Q = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = 50e^{-4t}\sin 3t$$

(b) 若$E = 100\sin 3t$，則(2)變爲

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50\sin 3t$$

取拉氏變換，得

$$(s^2+8s+25)q = \frac{150}{s^2+9}$$

即
$$\begin{aligned} q &= \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)} \\ &= \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9} \end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned} Q &= \frac{25}{26}\sin 3t - \frac{75}{52}\sin 3t + \frac{25}{26}e^{-4t}\sin 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t \\ &= \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2\sin 3t) \end{aligned}$$

且 $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17\sin 3t + 6\cos 3t)$

當 t 很大時，Q 及 I 中包含 e^{-4t} 的項均趨近於零，這些包含 e^{-4t} 的項稱爲此解答中的**暫態項**（Transient terms）或**暫態部分**（Transient part）。其他項稱爲此解答之**穩態項**（Steady-state terms）或**穩態部分**（Steady state part）。

3.17 已知圖 3-12 的電路在 $t = 0$ 時電流均爲零，試求在 $t > 0$ 時，各分枝的電流。

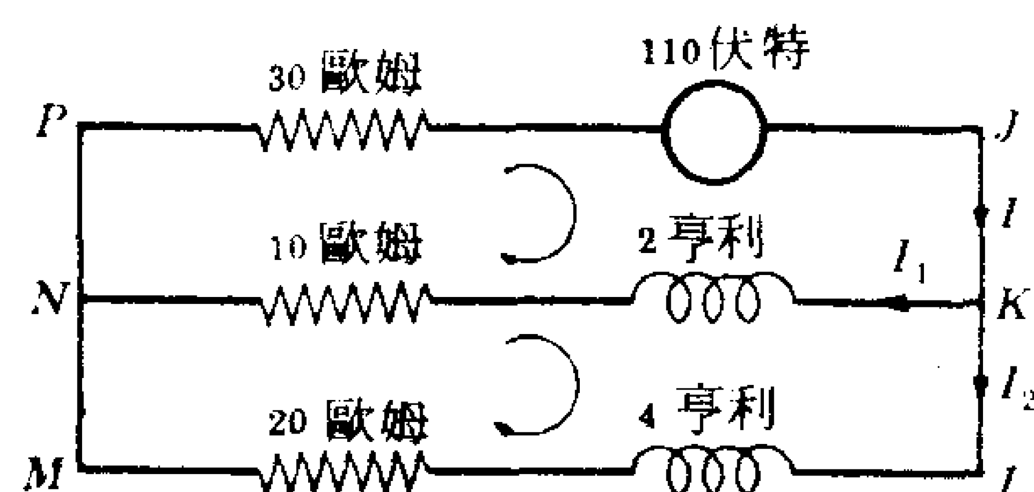


圖 3-12

答 克希荷夫第二定律指出，沿著一閉迴路的電位降或壓降之代數和爲零，現在我們順時鐘沿著迴路 $KLMNK$ 及 $JKNPJ$ 繞一圈。當我們在繞這些迴路時，若行進的方向和電流相反，則壓降就是正的，而壓升則爲壓降的相反數。

令 I 爲 $NPJK$ 中的電流，此電流在接點 K 分爲 I_1，I_2，故 $I = I_1 + I_2$，此相當於克希荷夫第一定律。

應用克希荷夫第二定律於迴路 $KLMNK$ 及 $JKNPJ$，可得

$$\left.\begin{aligned} -10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 &= 0 \\ 30I - 110 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} -5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2\frac{dI_2}{dt} + 10I_2 &= 0 \\ \frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 &= 55 \end{aligned}\right\}$$

起始條件爲 $I_1(0) = I_2(0) = 0$。

取拉氏變換，並代入起始條件，得

$$-5i_1 - \{si_1 - I_1(0)\} + 2\{si_2 - I_2(0)\} + 10i_2 = 0$$
$$\{si_1 - I_1(0)\} + 20i_1 + 15i_2 = 55/s$$

即

$$(s+5)i_1 - (2s+10)i_2 = 0$$
$$(s+20)i_1 + 15i_2 = 55/s$$

由第一式，得 $i_1 = 2i_2$，代入第二式得

$$(2s+55)i_2 = \frac{55}{s} \quad 故 \quad i_2 = \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

故

$$I_2 = 1 - e^{-55t/2}$$

$$I_1 = 2I_2 = 2 - 2e^{-55t/2}$$

$$I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55t/2}$$

橫樑方面的應用

3.18 假設有一橫樑，在端點 $x=0$ 及 $x=l$ 均爲鉸支承，且每單位長載有均勻負重 W_0，求任一點的撓度。

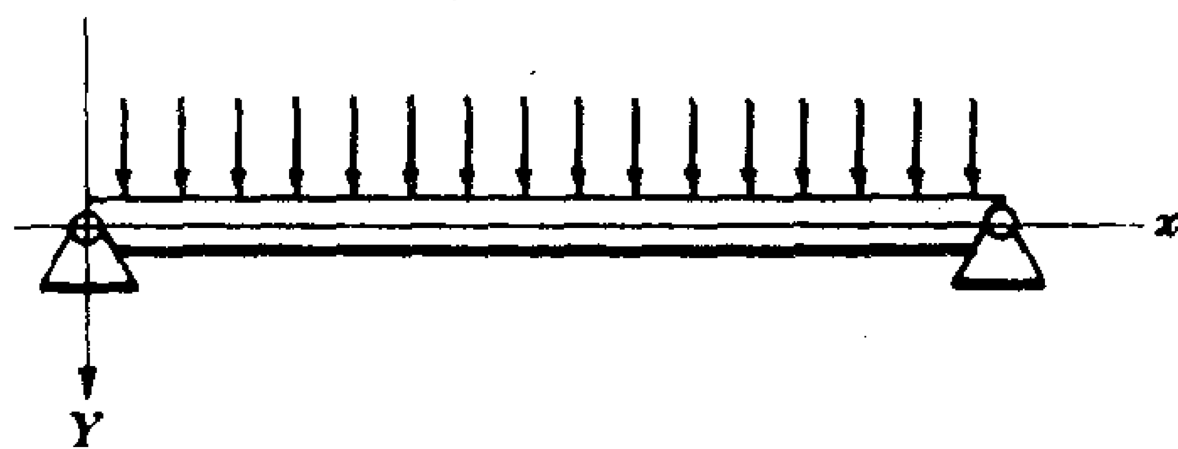


圖 3-13

解 微分方程式及邊界條件爲

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W_0}{EI} \qquad 0 < x < l \tag{1}$$

$$Y(0)=0,\ Y''(0)=0,\ Y(l)=0,\ Y''(l)=0 \tag{2}$$

取(1)式的拉氏變換，並令 $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$，則

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EIs} \tag{3}$$

利用(2)式的前 2 個條件，並令 $Y'(0)=c_1$，$Y'''(0)=c_2$，可得

$$y = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}$$

取反拉氏變換，得

$$Y(x) = c_1x + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} = c_1x + \frac{c_2x^3}{6} + \frac{W_0x^4}{24EI}$$

由(2)式的最後兩個條件，得

$$c_1 = \frac{W_0l^3}{24EI}, \qquad c_2 = -\frac{W_0l}{2EI}$$

故所求之撓度爲

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI}(l^3x - 2lx^3 + x^4) = \frac{W_0}{24EI}x(l-x)(l^2 + lx - x^2)$$

3.19 一懸臂樑（Cantilever beam）（圖 3-14）在端點 $x=0$ 為固定支承，而在另一端點 $x=l$ 為自由端。每單位長度的負載為

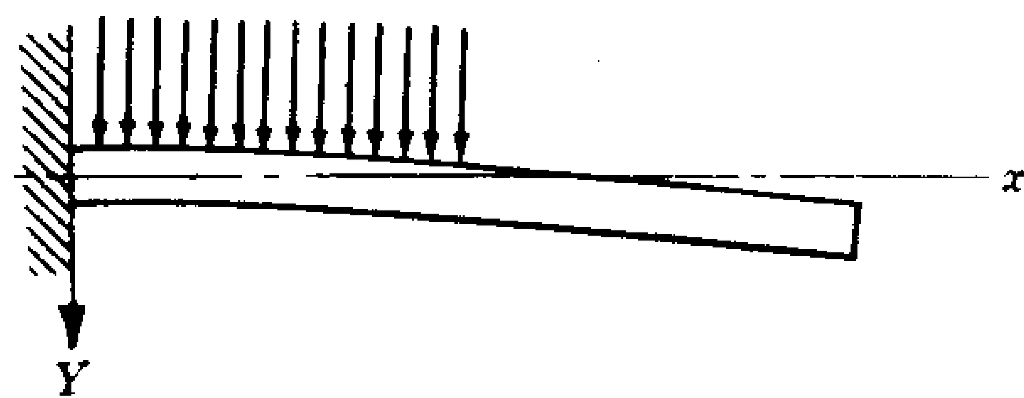


圖 3-14

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & l/2 < x < l \end{cases}$$

圖 微分方程式及邊界條件如下：

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \qquad 0 < x < l \tag{1}$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y''(l) = 0, \quad Y'''(l) = 0 \tag{2}$$

為了便於應用拉氏變換，我們將 $W(x)$ 之定義延伸如下：

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & x > l/2 \end{cases} \tag{3}$$

可利用黑佛塞單位函數寫成

$$W(x) = W_0\{u(x) - u(x - l/2)\} \tag{4}$$

取(1)式的拉氏變換，並令 $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$ 代入，得

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EI}\left\{\frac{1 - e^{-sl/2}}{s}\right\}$$

由(2)式的前兩個條件，並令 $Y''(0) = c_1$，$Y'''(0) = c_2$，可得

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}\{1 - e^{-sl/2}\}$$

取反拉氏變換，得

$$Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!} + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} - \frac{W_0}{EI}\frac{(x - l/2)^4}{4!}u(x - l/2)$$

此式相當於

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1x^2}{2!} + \dfrac{1}{6}c_2x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 & 0 < x < l/2 \\ \dfrac{c_1x^2}{2!} + \dfrac{1}{6}c_2x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 - \dfrac{W_0}{24EI}(x-l/2)^4 & x > l/2 \end{cases}$$

利用$Y''(l)=0$，$Y'''(l)=0$代入，得

$$c_1 = \frac{W_0 l^2}{8EI}, \qquad c_2 = -\frac{W_0 l}{2EI}$$

故所求之撓度爲

$$Y(x) = \frac{W_0 l^2}{16EI}x^2 - \frac{W_0 l}{12EI}x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4 - \frac{W_0}{24EI}(x-l/2)^4 u(x-l/2)$$

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{W_0 l^2}{16EI}x^2 - \dfrac{W_0 l}{12EI}x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 & 0 < x < l/2 \\ \dfrac{W_0 l^2}{16EI}x^2 - \dfrac{W_0 l}{12EI}x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 - \dfrac{W_0}{24EI}(x-l/2)^4 & l/2 < x < l \end{cases}$$

3.20 一懸樑其上有集中負載（Concentrated load）P_0，作用在$x=a$處。試證明我們可將此負載表爲$W(x)=P_0\delta(x-a)$，其中δ爲脈衝函數。

解 考慮一均勻負載分布自$x=a$至$x=a+\epsilon$，其大小爲每單位長度W_0，則總重量爲

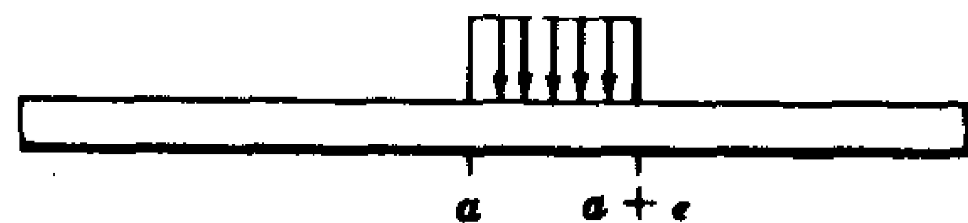


圖3-15

$$W_0[a+\epsilon-a] = W_0\epsilon$$

但因總重量爲P_0，故

$$W(x) = \begin{cases} P_0/\epsilon & a < x < a+\epsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

當$\epsilon \to 0$時，上式即可寫成

$$W(x) = P_0\delta(x-a)$$

故得證。

3.21 一懸樑其端點$x=0$及$x=l$均爲固定支承（見圖3-16），一集中負載P_0垂直作用於$x=l/3$處，求其撓度。

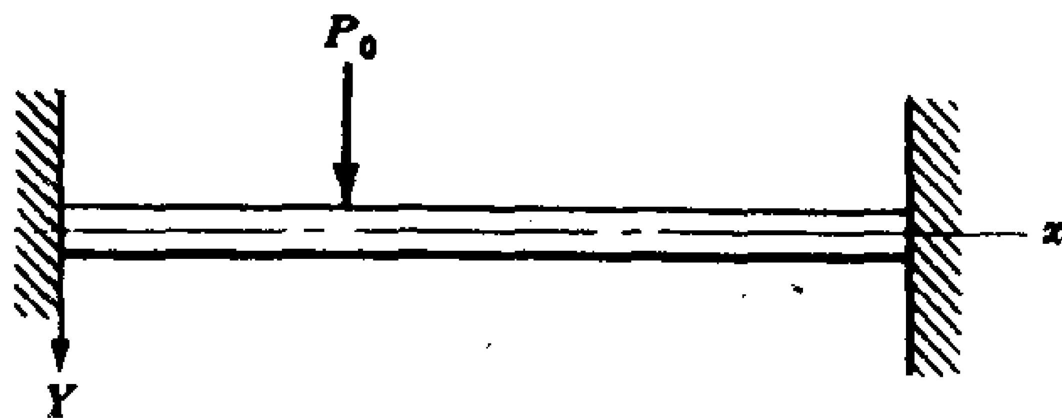


圖3-16

圖 由20題可知，作用於 $x=l/3$ 的集中負載可表爲 $P_0\delta(x-l/3)$，其中 δ 爲脈衝函數，則有關撓度的微分方程式及相關的起始條件爲

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}\delta(x-l/3) \tag{1}$$

$$Y(0)=0,\quad Y'(0)=0,\quad Y(l)=0,\quad Y'(l)=0 \tag{2}$$

取拉氏變換，並令 $y=\mathcal{L}\{Y(x)\}$ 代入，得

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{P_0}{EI}e^{-ls/3} \tag{3}$$

利用(2)之前兩個條件，並令 $Y''(0)=c_1$，$Y'''(0)=c_2$ 代入，得

$$y = \frac{c_1}{s^3}+\frac{c_2}{s^4}+\frac{P_0}{EI}\frac{e^{-ls/3}}{s^4} \tag{4}$$

取反拉氏變換，得

$$Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!}+\frac{c_2x^3}{3!}+\frac{P_0}{EI}\frac{(x-l/3)^3}{3!}u(x-l/3) \tag{5}$$

亦即，

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_1x^2+\frac{1}{6}c_2x^3 & 0<x<l/3 \\ \frac{1}{2}c_1x^2+\frac{1}{6}c_2x^3+\frac{P_0}{6EI}(x-l/3)^3 & l/3<x<l \end{cases}$$

再以(2)之後兩個條件代入，得

$$c_1 = \frac{4P_0l}{27EI},\qquad c_2 = \frac{-20P_0}{27EI}$$

故所求之撓度爲

$$Y(x) = \frac{2P_0lx^2}{27EI}-\frac{10P_0x^3}{81EI}+\frac{P_0}{6EI}(x-l/3)^3u(x-l/3)$$

即

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{2P_0x^2(3l-5x)}{81EI} & 0<x<l/3 \\ \frac{2P_0x^2(3l-5x)}{81EI}+\frac{P_0}{6EI}(x-l/3)^3 & l/3<x<l \end{cases}$$

偏微分方程式

3.22 給定 $U(x,t)$ 定義於 $a\leq x\leq b$，$t>0$，求

(a) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}dt,$ (b) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}dt$

但假設某些適當的限制已加諸於$U = U(x, t)$。

圖 (a) 由部分積分，得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}U(x,t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st}U(x,t)\,dt\right\} \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}U(x,t)\,dt - U(x,0) \\ &= s\,u(x,s) - U(x,0) = s\,u - U(x,0)\end{aligned}$$

其中 $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$.

我們已假設$U(x, t)$滿足定理1-1（對變數t而言）。

(b) 利用萊普尼茨規則（在積分符號內微分），可得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}dt = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}U\,dt = \frac{du}{dx}$$

3.23 根據22題，證明

(a) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = s^2 u(x,s) - s\,U(x,0) - U_t(x,0)$

(b) $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 u}{dx^2}$

其中 $U_t(x,0) = \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}$ 且 $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$.

圖 令$V = \partial U/\partial t$，利用22題(a)，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\} &= s\mathcal{L}\{V\} - V(x,0) \\ &= s[s\mathcal{L}\{U\} - U(x,0)] - U_t(x,0) \\ &= s^2 u - s\,U(x,0) - U_t(x,0)\end{aligned}$$

注意此題以及22題(a)的結果，和第1章定理1-6及1-9有某種相似性。讀者可試行推廣之。

3.24 解下列偏微分方程式

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\frac{\partial U}{\partial t} + U, \quad U(x,0) = 6e^{-3x}$$

其中 $x > 0$，$t > 0$。

答 對 t 取上述微分方程式的拉氏變換，並利用22題，得

$$\frac{du}{dx} = 2\{su - U(x,0)\} + u$$

帶入邊界條件，得

$$\frac{du}{dx} - (2s+1)u = -12e^{-3x} \tag{1}$$

注意到拉氏變換已將原先的偏微分方程式，轉化成爲常微分方程式。

欲解(1)式，兩邊各乘上一積分因式， $e^{\int -(2s+1)\,dx} = e^{-(2s+1)x}$ ，故(1)式可改寫成

$$\frac{d}{dx}\{u\,e^{-(2s+1)x}\} = -12\,e^{-(2s+4)x}$$

積分得

$$u\,e^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x} + c \quad 即 \quad u = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + c\,e^{(2s+1)x}$$

當 $x \to \infty$ 時，$U(x,t)$ 必有界，故 $u(x,s)$ 亦爲有界，由此可知 $c = 0$，故

$$u = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

取反拉氏變換，得

$$U(x,t) = 6\,e^{-2t-3x}$$

此即爲所求（可輕易驗算得知）。

3.25 解 $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 3\sin 2\pi x$, $U(0,t) = 0$, $U(1,t) = 0$ 其中 $0 < x < 1$，$t > 0$。

答 取上述微分方程式的拉氏變換，並利用22，23題，得

$$su - U(x,0) = \frac{d^2u}{dx^2} \quad 或 \quad \frac{d^2u}{dx^2} - su = -3\sin 2\pi x \tag{1}$$

其中 $u=u(x,s)=\mathcal{L}\{U(x,t)\}$. (1)式的通解爲

$$u = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x \tag{2}$$

取邊界條件（和 t 有關的）的拉氏變換，得

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}\{U(1,t)\} = u(1,s) = 0 \tag{3}$$

利用(3)式的第一個條件 [$u(0,s)=0$] 代入(2)中，可得

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{4}$$

利用(3)式的第二個條件 [$u(1,s)=0$] 代入(2)中，可得

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \tag{5}$$

由(4)及(5)，可知 $c_1=0$，$c_2=0$ 故(2)式變爲

$$u = \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x \tag{6}$$

取反拉氏變換可得

$$U(x,t) \doteq 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x \tag{7}$$

此問題有個有趣的物理解釋。考慮一物質被兩個無限大平面 $x=0$ 及 $x=1$ 所包圍，則方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

爲此物質的**熱傳導方程式**（Equation for heat conduction）其中 $U=U(x, t)$ 爲任意平面 x 在任意時間 t 時的溫度。k 爲一常數，稱爲**擴散係數**（Diffusivity），和物質的特性有關。邊界條件 $U(0,t)=0$ 及 $U(1,t)=0$ 指出在 $x=0$ 及 $x=1$ 的溫度均保持在零度，而 $U(x,0)=3\sin 2\pi x$ 則指出在 $0<x<1$ 中，最初溫度的分布情形，(7)式則指出在 $t>0$ 時，此物質中任意點的溫度值。更進一步的應用可參見第 8 章。

3.26 求出下式的有界解答 $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x>0, t>0$ ，但 $U(0,t)=1, U(x,0)=0$.

答 取偏微分方程式及 $U(0,t)=1$ 的拉氏變換，得

$$su - U(x,0) = \frac{d^2u}{dx^2} \quad 或 \quad \frac{d^2u}{dx^2} - su = 0 \tag{1}$$

且 $$u(0,s) = \frac{1}{s} \tag{2}$$

由(1)，$u = u(x,s) = c_1e^{\sqrt{s}x} + c_2e^{-\sqrt{s}x}$，但當 $x \to \infty$ 時，$U(x,t)$ 有界，$u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$ 亦必須有界，故 $c_1 = 0$（假設 $\sqrt{s} > 0$），得

$$u(x,s) = c_2e^{-\sqrt{s}x} \tag{3}$$

由(2)及(3)得 $c_2 = 1/s$，故

$$u(x,s) = \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s}$$

再利用第2章第43題，得

$$U(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-v^2}\,dv$$

物理上來說，此代表在 $x > 0$ 時，物質中任意點的溫度。但在 $x = 0$ 這個平面上，其初溫爲零，而其後溫度保持在一度（見25題）。

其他各類問題

3.27 假設在14題中，一外力 $F'(t)$ 施於質點，且阻滯力爲零，(a)若 $F(t) = F_0\cot\omega t$，求質點在任意時間 t 的位置。討論所得結果的物理意義。

圖 (a) 若考慮外力 $\mathcal{F}(t)$，則運動方程式變爲

$$2\frac{d^2X}{dt^2} = -8X + \mathcal{F}(t) \tag{1}$$

即 $$2X'' + 8X = \mathcal{F}(t) \tag{2}$$

起始條件仍同前，爲

$$X(0) = 10, \quad X'(0) = 0 \tag{3}$$

若 $\mathcal{F}(t) = F_0\cos\omega t$，(2)式變爲

$$2X'' + 8X = F_0\cos\omega t \tag{4}$$

取拉氏變換，並將(3)式代入，得（其中 $x = \mathcal{L}\{X\}$），

$$2\{s^2x - s(10) - 0\} + 8x = \frac{F_0 s}{s^2+\omega^2}$$

若 $\omega^2 \neq 4$，則

$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2+4)(s^2+\omega^2)} \tag{5}$$

即
$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0}{2(\omega^2-4)}\left\{\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} \tag{6}$$

故
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t + \frac{F_0}{2(\omega^2-4)}(\cos 2t - \cos\omega t) \tag{7}$$

若 $\omega^2=4$ ，則(5)式變爲

$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2+4)^2} \tag{8}$$

故利用第 2 章第 13 題，得

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t + \frac{F_0}{8}t\sin 2t \tag{9}$$

(b) 若 $\omega^2=4$ 或 $\omega=2$ ，即外力的頻率和系統的自然頻率相同時，則由(9)式可看出，振盪之振幅將無限增大，此現象稱爲**共振**(Resonance)，而和 $\omega=2$ 對應之頻率稱爲**共振頻率**(Resonance frequency)。若質點是連接在彈簧之上，則彈簧最後會被扯斷。

3.28 試求 27 題，若 (a) $\mathcal{F}(t)=F_0\mathcal{U}(t-a)$, (b) $\mathcal{F}(t)=F_0\delta(t)$.

圖 (a) 在此情況下，運動方程式爲（參見第 27 題(2)）

$$2X'' + 8X = F_0\mathcal{U}(t-a)$$

其中$X(0)=10$，$X'(0)=0$ ，取拉氏變換，得

$$2(s^2x-10s) + 8x = \frac{F_0e^{-as}}{s}$$

且
$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0e^{-as}}{2s(s^2+4)}$$
$$= \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0e^{-as}}{8}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right\}$$

故
$$X = \begin{cases} 10\cos 2t + \frac{1}{8}F_0\{1-\cos 2(t-a)\} & \text{if } t>a \\ 10\cos 2t & \text{if } t<a \end{cases}$$

在 $t=a$ 之前，質點的位移和 27 題是相同的，但在 $t=a$ 之後，位移就不同了。

(b) 在此情況下，運動方程式為

$$2X'' + 8X = F_0\,\delta(t), \qquad X(0) = 10, \quad X'(0) = 0$$

取拉氏變換，得

$$2(s^2x - 10s) + 8x = F_0$$

即
$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0}{2(s^2+4)}$$

故
$$X = 10\cos 2t + \tfrac{1}{4}F_0 \sin 2t \tag{1}$$

物理上，施外力$F_0\,\delta(t)$，相當於在很短時間內，施加一非常大的力量，而在其後完全不加外力，此效果會產生大振幅的位移，比 14 題的位移還大。將(1)式改寫之後，即可看出

$$X = \sqrt{100 + F_0^2/16}\,\cos(2t - \phi) \tag{2}$$

其中
$$\cos\phi = \frac{10}{\sqrt{100 + F_0^2/16}}, \qquad \sin\phi = \frac{F_0/4}{\sqrt{100 + F_0^2/16}}$$

或 $\tan\phi = F_0/40$，故振幅為 $\sqrt{100 + F_0^2/16}$。

3.29 若$Y = Y_1(t)$滿足下列等式

$$Y''(t) + P(t)\,Y'(t) + Q(t)\,Y(t) = 0$$

試求出下式的通解 $Y''(t) + P(t)\,Y'(t) + Q(t)\,Y(t) = R(t)$.

答 所欲求解之方程式為

$$Y'' + PY' + QY = R \tag{1}$$

當$R = 0$時，$Y = Y_1$為上式之一解，即

$$Y_1'' + PY_1' + QY_1 = 0 \tag{2}$$

將(1)式乘上Y_1，(2)式乘上Y，相減得

$$Y_1Y'' - YY_1'' + P(Y_1Y' - YY_1') = RY_1 \tag{3}$$

可寫成

$$\frac{d}{dt}(Y_1Y' - YY_1') + P(Y_1Y' - YY_1') = RY_1 \tag{4}$$

上式之積分因式為

$$e^{\int P\,dt}$$

將(4)式乘上此積分因式，則可寫成

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{\int P\,dt}(Y_1 Y' - Y Y_1')\right\} = R Y_1 e^{\int P\,dt} \tag{5}$$

積分得

$$e^{\int P\,dt}(Y_1 Y' - Y Y_1') = \int R Y_1 e^{\int P\,dt}\,dt + c_1 \tag{6}$$

即

$$Y_1 Y' - Y Y_1' = e^{-\int P\,dt}\int R Y_1 e^{\int P\,dt}\,dt + c_1 e^{-\int P\,dt} \tag{7}$$

其中 c_1 爲積分後產生的常數。

將(7)式兩邊各除以 Y_1^2，則可寫成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Y_1}\right) = \frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\int R Y_1 e^{\int P\,dt}\,dt + c_1\frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2} \tag{8}$$

將(8)式積分，並乘上 Y_1，則可得（ c_2 亦爲積分後產生的常數）

$$Y = c_1 Y_1 \int \frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\,dt + c_2 Y_1 + Y_1 \int\left\{\frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\int R Y_1 e^{\int P\,dt}\,dt\right\}dt \tag{9}$$

此即所求之通解。第 103 題有另解。

3.30 求下式之通解 (a) $tY'' + 2Y' + tY = 0$, (b) $tY'' + 2Y' + tY = \csc t$.

圖 (a) 由第 10 題，可得方程式之特解爲

$$Y_1(t) = \frac{\sin t}{t}$$

但所給之方程式可寫成 29 題(1)的形式，其中

$$P = 2/t, \quad Q = 1, \quad R = 0$$

故由 29 題第(9)式可知通解爲

$$\begin{aligned} Y &= c_1\frac{\sin t}{t}\int\frac{e^{-\int(2/t)\,dt}}{\sin^2 t/t^2}\,dt + c_2\frac{\sin t}{t} \\ &= c_1\frac{\sin t}{t}\int \csc^2 t\,dt + c_2\frac{\sin t}{t} \\ &= c_1\frac{\sin t}{t}(-\cot t) + c_2\frac{\sin t}{t} = \frac{A\cos t + B\sin t}{t} \end{aligned}$$

其中 $c_1 = -A$, $c_2 = B$ 爲任意常數。

(b) 利用 29 題第(9)式，其中

$$P = 2/t, \quad Q = 1, \quad R = (\csc t)/t$$

故得

$$Y = \frac{A\cos t + B\sin t}{t} - \cos t + \frac{\sin t \ln \sin t}{t}$$

3.31 解下列偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + Y = 16x + 20\sin x$$

邊界條件爲

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = 16\pi, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$$

答 取拉氏變換，得

$$s^2 y - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) - 4\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s} \tag{1}$$

代入已知條件，得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{4}(s^2+1)y = \frac{-4(s^2+1)x}{s} - \frac{5\sin x}{s} - 3s\sin 2x + 2s\sin 3x \tag{2}$$

$$y(0,s) = 0, \qquad y(\pi,s) = \frac{16\pi}{s} \tag{3}$$

(2)式的特解形式爲

$$y_p = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x \tag{4}$$

代入(2)式，化簡並比較係數，可得特解爲

$$y_p = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37} \tag{5}$$

當(2)式的右端改爲零時，其通解（此即爲餘解，complementary solution）爲

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} \tag{6}$$

故(2)式之通解爲

$$y = y_p + y_c \tag{7}$$

將(3)代入(7)，得

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,\pi} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,\pi} = 0$$

解得 $c_1 = c_2 = 0$ ，故

$$y = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

再取反拉氏變換，即可得所求之解

$$Y(x,t) = 16x + 4\sin x\,(1-\cos\sqrt{5}\,t) + 12\sin 2x\cos\sqrt{17}\,t - 8\sin 3x\cos\sqrt{37}\,t$$

補充題

常係數常微分方程式

利用拉氏變換解下列方程式，並驗算之。

3.32 $Y''(t) + 4Y(t) = 9t,\quad Y(0)=0,\ Y'(0)=7.$ 　答 $Y(t) = 3t + 2\sin 2t$

3.33 $Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t},\quad Y(0)=6,\ Y'(0) = -1.$

答 $Y(t) = 3e^t - 2e^{2t} + 2t + 3 + 2e^{-t}$

3.34 $Y''(t) - 4Y'(t) + 5Y(t) = 125t^2,\quad Y(0) = Y'(0) = 0.$

答 $Y(t) = 25t^2 + 40t + 22 + 2e^{2t}(2\sin t - 11\cos t)$

3.35 $Y''(t) + Y(t) = 8\cos t,\quad Y(0)=1,\ Y'(0)=-1.$

答 $Y(t) = \cos t - 4\sin t + 4t\cos t$

3.36 $Y'''(t) - Y(t) = e^t,\quad Y(0)=0,\ Y'(0)=0,\ Y''(0)=0.$

答 $Y(t) = \frac{1}{3}te^t + \frac{1}{18}e^{-\frac{1}{2}t}\left\{9\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\} - \frac{1}{2}e^t$

3.37 $Y^{iv}(t) + 2Y''(t) + Y(t) = \sin t,\quad Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = Y'''(0) = 0.$

答 $Y(t) = \frac{1}{8}\{(3-t^2)\sin t - 3t\cos t\}$

3.38 求下列微分方程式的通解：

(a) 第 2 題，(b)第 3 題，(c)第 6 題。

答 (a) $Y = c_1e^t + c_2e^{2t} + 4te^{2t}$
(b) $Y = e^{-t}(c_1\sin 2t + c_2\cos 2t) + \frac{1}{3}e^{-t}\sin t$
(c) $Y = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$

3.39 解 $Y''(t) + 9Y(t) = 18t$ 其中 $Y(0)=0,\ Y(\pi/2)=0.$ 　答 $Y(t) = 2t + \pi\sin 3t$

3.40 解 $Y^{iv}(t) - 16Y(t) = 30\sin t$ 其中 $Y(0)=0,\ Y'(0)=2,\ Y''(\pi)=0,\ Y'''(\pi)=-18.$

答 $Y = 2(\sin 2t - \sin t)$

3.41 解 $Y''-4Y'+3Y = F(t)$ 其中 $Y(0)=1,\ Y'(0)=0.$

答 $Y = \frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}\int_0^t (e^{3u}-e^{u})F(t-u)\,du$

3.42 解下列微分方程式

$$Y''+4Y = F(t),\quad Y(0)=0,\ Y'(0)=1$$

其中 $F(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases}.$

答 $Y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\{\cos(2t-2)-\cos 2t\}$ for $t>1$

且 $Y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$ for $t<1$

3.43 解42題，其中(a) $F(t)=u(t-2)$，[單位階梯函數]；(b) $F(t)=\delta(t)$，[脈衝函數]；(c) $F(t)=\delta(t-2)$。

答 (a) $Y(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2t, & t<2 \\ \frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\{1-\cos(2t-4)\}, & t>2 \end{cases}$

(b) $Y(t)=\sin 2t,\ t>0$

(c) $Y(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2t, & t<2 \\ \frac{1}{2}\{\sin 2t+\sin(2t-4)\}^2, & t>2 \end{cases}$

變係數常微分方程式

利用拉氏變換解下列方程式，並驗算之。

3.44 $Y''+tY'-Y = 0,\ Y(0)=0,\ Y'(0)=1.$ 答 $Y=t$

3.45 $tY''+(1-2t)Y'-2Y = 0,\ Y(0)=1,\ Y'(0)=2.$ 答 $Y=e^{2t}$

3.46 $tY''+(t-1)Y'-Y = 0,\ Y(0)=5,\ Y(\infty)=0.$ 答 $Y=5e^{-t}$

3.47 求下列方程式的有界解答

$$t^2Y''+tY'+(t^2-1)Y = 0$$

已知 $Y(1)=2$。 答 $2J_1(t)/J_1(1)$

聯立常微分方程式

3.48 解 $\begin{cases} Y'+2Z' = t \\ Y''-Z = e^{-t} \end{cases}$ 已知 $Y(0)=3,\ Y'(0)=-2,\ Z(0)=0.$

答 $Y = 2+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t,\quad Z = 1-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t$

3.49 解 $\begin{cases} Y' - Z' - 2Y + 2Z = \sin t \\ Y'' + 2Z' + Y = 0 \end{cases}$ 已知 $Y(0) = Y'(0) = Z(0) = 0.$

答 $Y = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{4}{45}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t + \frac{1}{3}te^{-t}, \quad Z = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

3.50 解 $\begin{cases} X' + 2Y'' = e^{-t} \\ X' + 2X - Y = 1 \end{cases}$ 已知 $X(0) = Y(0) = Y'(0) = 0.$

答 $X = 1 + e^{-t} - e^{-at} - e^{-bt}, \; Y = 1 + e^{-t} - be^{-at} - ae^{-bt}$ 其中 $a = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}), \; b = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$

3.51 解 49 題，但已知 $Y(0) = 0, \; Y'(\pi) = 1, \; Z(0) = 0.$

3.52 解 $\begin{cases} tY + Z + tZ' = (t-1)e^{-t} \\ Y' - Z = e^{-t} \end{cases}$ 已知 $Y(0) = 1, \; Z(0) = -1.$

答 $Y = J_0(t), \; Z = -J_1(t) - e^{-t}$

3.53 解 $\begin{cases} -3Y'' + 3Z'' = te^{-t} - 3\cos t \\ tY'' - Z' = \sin t \end{cases}$ 已知 $Y(0) = -1, \; Y'(0) = 2, \; Z(0) = 4, \; Z''(0) = 0.$

答 $Y = \frac{2}{3}t^2 + \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-t}, \quad Z = \frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} + \cos t$

3.54 求 49 題方程組的通解。

答 $Y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t}$

$Z = 1 - c_2 \sin t - c_3 \cos t - \frac{1}{2}e^{-t}$

在力學力面的應用

3.55 參考圖 3-1，若質量爲 m 之物體受一外力 $\mathcal{F}(t)$，$t > 0$，但無阻滯力存在。

(a) 若此物體由 $X = a$（$X = 0$ 爲平衡點）處釋放，證明在任意時刻 $t > 0$ 的位移 X，可由下列運動方程式求得

$$mX'' + kX = \mathcal{F}(t), \quad X(0) = a, \quad X'(0) = 0$$

其中撇號（“ ′ ”，prime）代表對 t 的微分。

(b) 若 $F(t) = F_0$（一常數），求在任意時刻 $t > 0$ 時的 X 值。

(c) 若 $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$（$\alpha > 0$），求在任意時刻 $t > 0$ 時的 X 值。

答 (b) $X = a + \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$

(c) $X = a + \frac{F_0}{m\alpha^2 + k}\left(e^{-\alpha t} - \cos\sqrt{k/m}\,t\right) + \frac{\alpha F_0\sqrt{m/k}}{m\alpha^2 + k}\sin\sqrt{k/m}\,t$

3.56 若 $\mathcal{F}(t) = F_0 \sin \omega t$，重做 55 題，並分兩種情形解之：(a) $\omega \neq \sqrt{k/m}$，(b) $\omega = \sqrt{k/m}$. 討論這兩種情況下的物理意義爲何。

3.57 一質點沿著直線移動，在任意時刻 t 時，自某固定 O 算起的位移 X，滿足

$$X''(t) + 4X(t) + 5X(t) = 80 \sin 5t$$

(a) 若在 $t = 0$ 時，此質點靜止於 $X = 0$，求在任意時刻 $t > 0$ 時的位移。
(b) 經過一段長時間後，求此運動的振幅、週期及頻率。
(c) 在(a)的答案中，何者爲暫態項？何者爲穩態項？
(d) 此運動爲過阻滯、臨界阻滯或是阻滯振盪？

答 (a) $X(t) = 2e^{-2t}(\cos t + 7\sin t) - 2(\sin 5t + \cos 5t)$
(b) 振幅 $= 2\sqrt{2}$，週期 $= 2\pi/5$，頻率 $= 5/2\pi$
(c) 暫態項，$2e^{-2t}(\cos t + 7\sin t)$；穩態項，$-2(\sin 5t + \cos 5t)$
(d) 阻滯振盪

3.58 在 $t = 0$ 時，質量 m（參見圖 3-1）靜止於平衡點 $X = 0$，若有一外力突然加於 m 上，並立刻移開，以致於 m 獲得一向右的瞬時速度 V_0，證明在任意時刻 $t > 0$ 時，相對於平衡點之位移如下

(a) 無阻滯力時，位移爲 $V_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$

(b) 若存在一阻滯力 $\beta X'(t)$（$\beta < 2\sqrt{km}$），則位移爲

$$\frac{V_0}{\alpha}e^{-\beta t/2m} \quad \text{where} \quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

3.59 重做 54 題，其中 (a) $\mathcal{F}(t) = F_0 u(t-T)$［單位階梯函數］；(b) $\mathcal{F}(t) = F_0\delta(t-T)$［脈衝函數］。討論其物理意義爲何。

答 (a) $X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t$ ，$t < T$ 且
$X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t + (F_0/k)\{1 - \cos\sqrt{k/m}\,(t-T)\}$ ，$t > T$

(b) $X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t$ ，$t < T$ 且
$X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t + (F_0/\sqrt{km})\sin\sqrt{k/m}\,(t-T)$ ，$t > T$

3.60 在 $t = 0$ 時，質量 m（參見圖 3-1）靜止於平衡點，此時加上一外力 $F_0\,\delta(t)$，在下列各情況下，求任意時刻 $t > 0$ 時的位移：(a)此系統爲無阻滯，(b)此系統爲臨界阻滯。討論每種情況下的物理意義爲何。

答 (a) $\frac{F_0}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{k/m}\,t$, (b) $\frac{F_0}{m}t\,e^{-\beta t/2m}$

3.61 一球質量爲 m，以速度 V_0 自地平面向上拋，證明其最大高度爲 $V_0^2/2g$，其中 g 爲重力加速度。

3.62 一質量m沿x軸移動，受到一正比於瞬時速率的外力，且此力的方向和運動的方向相反。假設在$t=0$時，此物體位於$X=a$，且正以V_0的速率向右移動。當此物體停止時，求其位置爲何。

3.63 一質點在xy平面移動，在任意時刻t時，其位置（X，Y）滿足

$$X''+k_1^2Y=0,\qquad Y''+k_2^2X=0$$

在$t=0$時，此質點自（a，b）釋放，求任意時刻$t>0$之位置。

答
$$X=\left(\frac{ak_2+bk_1}{2k_2}\right)\cos\sqrt{k_1k_2}\,t+\left(\frac{ak_2-bk_1}{2k_2}\right)\cosh\sqrt{k_1k_2}\,t$$
$$Y=\left(\frac{ak_2+bk_1}{2k_1}\right)\cos\sqrt{k_1k_2}\,t-\left(\frac{ak_2-bk_1}{2k_1}\right)\cosh\sqrt{k_1k_2}\,t$$

電路方面的應用

3.64 一電阻R歐姆及一電容C法拉串聯，再加上一電源供應E伏特的電壓，如圖 3-17所示。在$t=0$時，電容上之電荷爲零，在下列情況，求任意時刻$t>0$時的電荷及電流(a) $E=E_0$（一常數）；(b) $E=E_0\,e^{-\alpha t}$，$\alpha>0$。

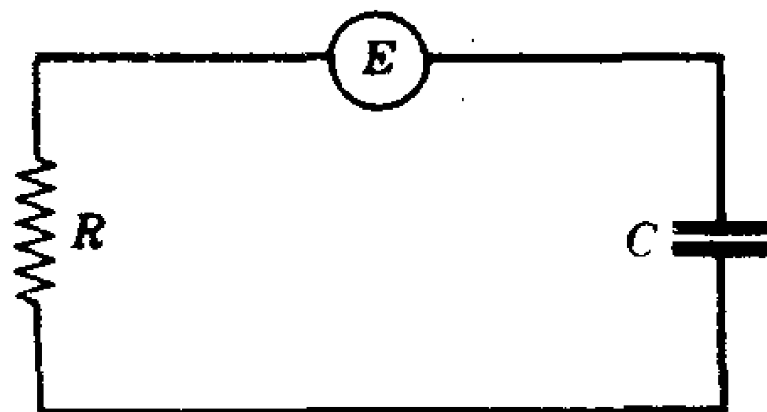


圖 3-17

答 (a) $Q=CE_0(1-e^{-t/RC}),\quad I=(E_0/R)e^{-t/RC}$

(b) $Q=\dfrac{CE_0}{1-\alpha RC}(e^{-\alpha t}-e^{-t/RC}),$

$I=\dfrac{CE_0}{1-\alpha RC}\left(\dfrac{e^{-t/RC}}{RC}-\alpha e^{-\alpha t}\right)$ 其中$\alpha\neq1/RC$

3.65 重做 64 題，但$E=E_0\sin\omega t$，及$t=0$時的電荷值爲Q_0。

答 $Q=\left\{Q_0+\dfrac{\omega E_0}{R(\omega^2+1/R^2C^2)}\right\}e^{-t/RC}-\dfrac{E_0}{R}\left\{\dfrac{\omega\cos\omega t-(1/RC)\sin\omega t}{\omega^2+1/R^2C^2}\right\},\quad I=dQ/dt$

3.66 一電感L亨利和電容C法拉串聯，並加上一電源E伏特。在$t=0$時，電容中的電荷及電容中的電流均爲零。在下列情況下，求任意時刻$t>0$時，電容中的電荷大小：(a) $E=E_0$（一常數），(b) $E=E_0\,e^{-\alpha t}$，$\alpha>0$

答 (a) $Q=CE_0\{1-\cos(t/\sqrt{LC})\}$

(b) $Q=\dfrac{E_0}{L(\alpha^2+1/LC)}\{e^{-\alpha t}-\cos(t/\sqrt{LC})\}+\dfrac{\alpha E_0\sqrt{C/L}}{\alpha^2+1/LC}\sin(t/\sqrt{LC})$

3.67 重做 66 題，但$E = E_0 \sin \omega t$。分下列情況討論之：(a) $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$ 及(b) $\omega = 1/\sqrt{LC}$，解釋其物理意義。

3.68 在下列情況下，重做 66 題：(a) $E(t) = E_0 u(t-a)$，其中 $u(t-a)$ 爲單位階梯函數，(b) $E(t) = E_0 \delta(t)$，其中 $\delta(t)$ 爲脈衝函數。

答 (a) $Q = 0$ 若 $t < a$, 且 $CE_0\left\{1 - \cos\left(\frac{t-a}{LC}\right)\right\}$ 若 $t > a$

(b) $Q = E_0\sqrt{C/L}\sin(t/\sqrt{LC})$

3.69 一電感 3 亨利和電阻 30 歐姆串聯，並加上電動勢 150 伏特。若 $t = 0$ 時，電流爲零，求任意時刻 $t > 0$ 時的電流值。

答 $I = 5(1 - e^{-10t})$

3.70 重做 69 題，但電動勢改爲 $150 \sin 20t$。

答 $I = \sin 20t - 2\cos 20t + 2e^{-10t}$

3.71 （參見圖 3-18）在 $t = 0$ 時，將按鍵 K 按下，求其後任意時刻 t 時，電容中的電荷及電路中的電流值。其中 L，R，C，及 E 均爲常數，且在 $t = 0$ 時，電荷及電流均爲零。討論所有可能發生的情形。

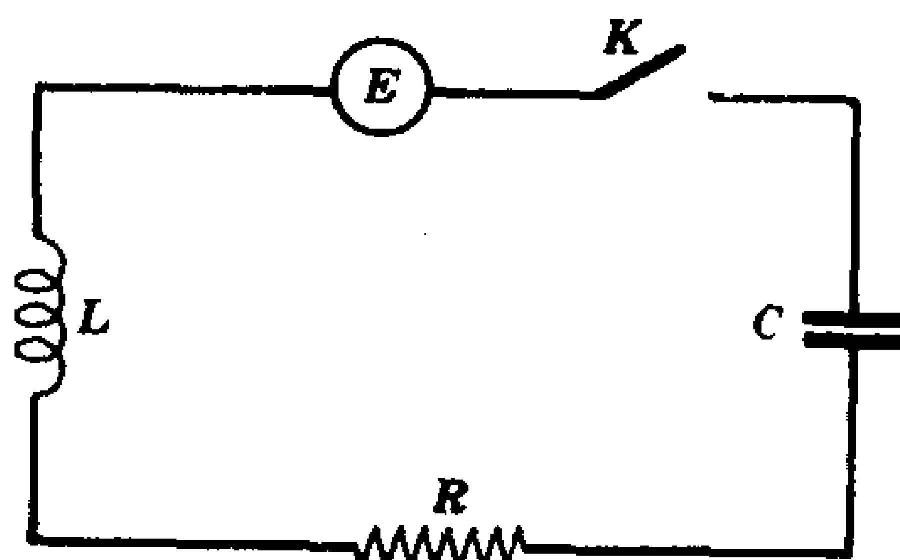


圖 3-18

3.72 (a)重做 71 題，但 $E = E_0 \sin \omega t$ (b)證明在 $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ 時發生共振，

(c)討論 $R = 0$ 的情形。

3.73 一電路包含一電感 L 亨利和一電容 C 法拉的串聯。在 $t = 0$ 時，加入一電動勢

$$E(t) = \begin{cases} E_0 t/T_0 & 0 < t < T_c \\ 0 & t > T_0 \end{cases}$$

若在 $t = 0$ 時，電流及電容中的電荷均爲零，求在任意時刻 $t > 0$ 時的電荷值。

答 $Q = \frac{CE_0}{T_0}\{t - \sqrt{LC}\sin(t/\sqrt{LC})\}$, $0 < t < T_0$ 且

$$Q = \frac{CE_0}{T_0}\left\{T_0\cos\left(\frac{t-T_0}{\sqrt{LC}}\right) + \sqrt{LC}\sin\left(\frac{t-T_0}{\sqrt{LC}}\right) - \sqrt{LC}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}\right\} , \quad t > T_0$$

3.74 在圖 3-19 的電路中，

$E = 500 \sin 10t$

$R_1 = 10$ 歐姆

$R_2 = 10$ 歐姆

$L = 1$ 亨利

$C = 0.01$ 法拉

若在 $t = 0$ 時，電容中的電荷及 I_1，I_2 均為零，求在任意時刻 $t > 0$ 時，電容中的電荷值。

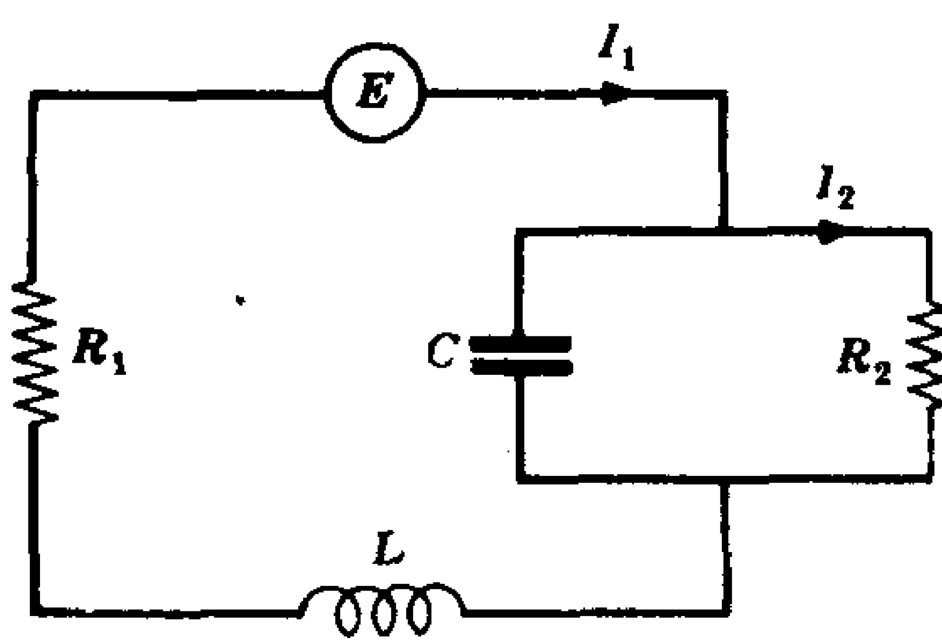


圖 3-19

答　$Q = \sin 10t - 2\cos 10t + e^{-10t}(\sin 10t + 2\cos 10t)$

橫樑方面的應用

3.75 一橫樑之端點 $x = 0$ 及 $x = l$ 均為固定支承，且其上之均勻負載為每單位長度 W_0，證明在任意點之撓度為 $Y(x) = \dfrac{W_0 x^2(l-x)^2}{24EI}$

3.76 重做 75 題，但在 $x = 0$ 處為固定支承，在 $x = l$ 處為鉸支承。

3.77 一懸臂樑在 $x = 0$ 為固定支承，在 $x = l$ 為自由端，且每單位長之負載為 W_0，證明其撓度為 $Y(x) = \dfrac{W_0 x^2}{24EI}(x^2 - 4lx + 6l^2)$.

3.78 一橫樑在 $x = 0$ 及 $x = l$ 為鉸支承，其負載為

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l/3 \\ W_0 & l/3 < x < l \end{cases}$$

試求其撓度。

3.79 一懸臂樑在 $x = 0$ 為固定支承，在 $x = l$ 為自由端，具有一集中負載 P_0 作用於 $x = l$ 處。證明其撓度為 $Y(x) = \dfrac{P_0 x^2}{6EI}(3l - x)$.

3.80 若負載作用於 $x = l/2$ 處，試重做 79 題。

3.81 一橫樑在其端點 $x = 0$ 及 $x = l$ 均為鉸支承。若一集中負載 P_0 垂直作用於 $x = l/2$ 處，證明其撓度為

$$Y(x) = \frac{P_0 x}{48EI}(3l^2 - 4x^2) \qquad 0 < x < l/2$$

在上式中，將 x 以 $l-x$ 取代之，即可得在 $l/2<x<l$ 的撓度。

3.82 若端點均爲固定支承，重做 81 題。

3.83 一橫樑在端點 $x=0$ 及 $x=l$ 均爲鉸支承。若一集中負載 P_0 垂直作用於 $x=l/3$ 處，證明其撓度爲

$$Y(x) = \frac{P_0 x(5l^2-9x^2)}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}(x-l/3)^3 u(x-l/3)$$

3.84 一橫樑在其端點 $x=0$ 及 $x=l$ 均爲鉸支承，且每單位長度受到均勻負載 W_0，另有一集中負載 P_0 作用於 $x=l/2$ 處，(a)求其撓度，(b)討論(a)所得答案，是否可由 18 題及 81 題的答案來求得，並解釋之。

3.85 一橫樑在其端點 $x=0$ 及 $x=l$ 均爲固定支承，且每單位長度受到負載如下：

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0<x<l/2 \\ W_0 x & l/2<x<l \end{cases}$$

另有一集中負載 P_0 作用於 $x=l/3$ 處，試求其撓度。

偏微分方程式

3.86 解 $\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t)=0$, $U(5,t)=0$, $U(x,0)=10\sin 4\pi x$.

答 $U(x,t)=10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x$

3.87 重做 86 題，其中 $U(x,0) = 10\sin 4\pi x - 5\sin 6\pi x$.

答 $U(x,t) = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x - 5e^{-72\pi^2 t}\sin 6\pi x$

3.88 解 $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y(0,t)=0$, $Y(2,t)=0$, $Y(x,0) = 20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x$.

答 $Y(x,t) = 20\sin 2\pi x\cos 6\pi t - 10\sin 5\pi x\cos 15\pi t$

3.89 以物理觀點解釋下列各題(a) 86 題，(b) 87 題，(c) 88 題。

3.90 解 $\frac{\partial U}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0,t)=0$, $U(\pi/2,t)=0$ 但

(a) $U(x,0) = 30\cos 5x$, (b) $U(x,0) = 20\cos 3x - 5\cos 9x$

答 (a) $30e^{-75t}\cos 5x$, (b) $U(x,t) = 20e^{-27t}\cos 3x - 5e^{-243t}\cos 9x$

3.91 討論 90 題的物理意義。

3.92 (a) 求解 $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$, $U(0,t)=0$, $U(\pi,t)=0$, $U(x,0) = 6\sin x - 4\sin 2x$.

(b) 討論可能的物理意義。

答 (a) $U(x,t) = 6e^{-5t}\sin x - 4e^{-8t}\sin 2x$

3.93 解 $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y_x(0,t) = 0$, $Y(3,t) = 0$, $Y(x,0) = 0$, $Y_t(x,0) = 12\cos\pi x + 16\cos 3\pi x - 8\cos 5\pi x$.

答 $Y(x,t) = 12\cos\pi x\sin 4\pi t + 16\cos 3\pi x\sin 12\pi t - 8\cos 5\pi x\sin 20\pi t$

3.94 求有界解$Y(x,t)$，$0<x<1$，$t>0$滿足下列邊界值問題

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 1 - e^{-t}, \qquad Y(x,0) = x$$

答 $Y(x,t) = x + 1 - e^{-t}$

3.95 解下列方程式

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x>0,\ t>0$$

但

$$Y(0,t) = 10\sin 2t, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} Y(x,t) = 0$$

其他各類問題

3.96 求證微分方程式

$$Y''(t) - k^2 Y(t) = F(t)$$

(但$Y(0) = a$，$Y'(0) = b$)的解爲

$$Y(t) = a\cosh kt + (b/k)\sinh kt + \frac{1}{k}\int_0^t F(u)\sinh k(t-u)\,du$$

3.97 解 $Y^{iv}(t) + Y'''(t) = 2\sin t$, $Y(0) = Y'(0) = 0$, $Y''(0) = 1$, $Y'''(0) = -2$.

答 $Y = \frac{1}{2}t^2 - 2 + e^{-t} + \sin t + \cos t$

3.98 求45題的通解。

答 $Y(t) = c_1 e^{2t}\int^t \frac{e^{-2t}}{t}dt + c_2 e^{2t}$

3.99 求具有拉氏變換，且滿足

$$tY'' - (t+2)Y' + 3Y = t - 1$$

的解，但$Y(0) = 0$

3.100 99題的通解爲何？

3.101 (a) 利用拉氏變換，證明方程式

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + k^2Y = A\cos\omega t, \qquad Y(0) = \alpha,\ Y'(0) = \beta$$

之解爲 $$Y(t) = \frac{A(\cos\omega t - \cos kt)}{\omega^2 - k^2} + \alpha\cos kt + (\beta/k)\sin kt.$$

(b) (a)中解答的物理意義爲何？

3.102 解 X: $\begin{cases} X' + Y' = Y + Z \\ Y' + Z' = X + Z \\ X' + Z' = X + Y \end{cases}$ 其中 $X(0) = 2,\ Y(0) = -3,\ Z(0) = 1.$

答 $X = \frac{2}{3}e^{-t/2}\{3\cos(\sqrt{3}\,t/2) - 2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\,t/2)\}$

3.103 令$Y = VY_1$（其中V爲新的依變數，Dependent variable），重做29題。

3.104 拉氏變換是否可用於求下式的通解？試解釋之。

$$Y'' + Y = \sec t$$

3.105 (a) 求下式的有界解

$$(t-1)Y'' + (5-4t)Y' - 4Y = 0$$

但$Y(0) = 3$，(b)(a)中方程式的通解爲何？

答 (a) $Y = 3e^{4t}$, (b) $Y = c_1e^{4t}\int \frac{e^{-4t}}{t-1}\,dt + c_2e^{4t}$

3.106 (a) 證明 $$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$

滿足下列微分方程式

$$\frac{dI}{dt} - I = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \qquad I(0) = \pi/2$$

(b) 藉著解得(a)之微分方程式，證明

$$I(t) = \frac{\pi}{2}e^t\,\mathrm{erfc}\sqrt{t}$$

3.107 一質點在直線（x軸）上移動，受到一排斥力，其大小正比於此質點和線上另一固定點O的距離。若此質點在距離O點爲a的地方釋放，並具有初速V_0（方向朝O），求此質點和O的最小距離。

3.108 若 61 題中的質點受到空氣阻力的作用，此力正比於瞬時速度，證明最大高度爲

$$\frac{m}{k^2}(kV_0 + mg - kg) - \frac{m^2 g}{k^2}$$

其中 k 爲比例常數。

3.109 在圖 3-18 中，若電動勢 E 爲 t 的函數，但 L，R，C 均爲常數。在 $t = 0$ 時，將按鍵 k 按下，此時電容中的電荷 Q 及電路中之電流 I 均爲零。若 $R^2 < 4L/C$，證明在任意時刻 $t > 0$ 時之電流爲

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t-u)\, e^{-Ru/2L}\left(\cos \alpha u - \frac{R}{2L\alpha}\sin \alpha u\right) du$$

其中 $\alpha = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$.

3.110 重做 109 題，但(a) $R^2 = 4L/C$，(b) $R^2 > 4L/C$

3.111 下列各題的力學類比爲何？(a) 64 題，(b) 66 題，(c) 71 題。

3.112 下列各題的電學類比爲何？(a) 55 題，(b) 57 題。

3.113 74 題的力學類比爲何？但須包含彈簧及和彈簧相連之物體。

3.114 一質點之質量爲 m，受 $F(t)$（如圖 3-20）之作用而在 x 軸上移動。若此質點在 $t = 0$ 時由靜止釋放，試求在任意時刻 $t > 0$ 時的位置及速度。

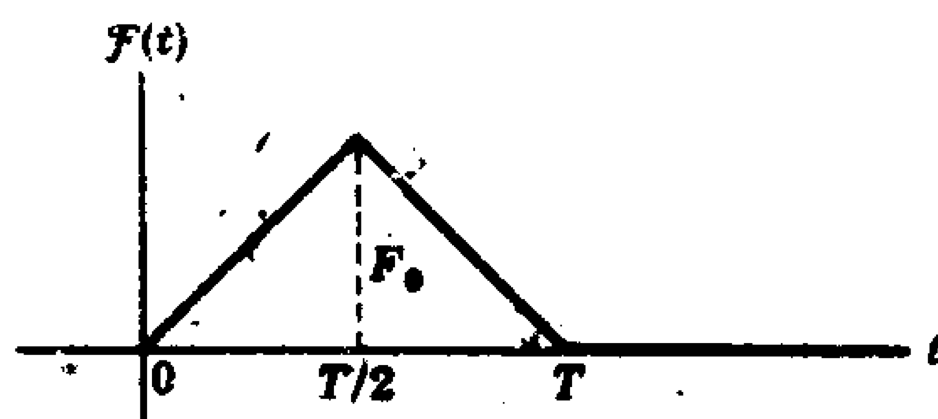


圖 3-20

3.115 一橫樑在 $x = 0$ 及 $x = l$ 均爲固定支承，且有一集中負載 P_0 作用於 $x = a$ 處，其中 $0 < a < l$。證明其撓度爲

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0 x^2 (l-a)^2}{6EIl^3}\{3al - (2a+l)x\} & 0 < x < a \\ \dfrac{P_0 x^2 (l-a)^2}{6EIl^3}\{3al - (2a+l)x\} + \dfrac{P_0 (x-a)^3}{6EI} & a < x < l \end{cases}$$

3.116 若上題之橫樑在 $x = 0$ 爲固定支承，在 $x = l$ 爲自由端，試重做之。

答
$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0 x^2}{6EI}(3a - x) & 0 < x < a \\ \dfrac{P_0 a^2}{6EI}(3x - a) & a < x < l \end{cases}$$

3.117 一橫樑在 $x=0$ 及 $x=l$ 均爲鉸支承，且有兩個集中負載分別作用於 $x=l/3$ 及 $x=2l/3$，其大小均爲 P_0 求其撓度。

3.118 一橫樑置於一彈性基座，且橫樑每單位長度受到 $W(x)$ 之作用。撓度之微分方程式爲

$$EI\frac{d^4Y}{dx^4} + kY = W(x)$$

其中 k 稱爲基座的彈性常數（Elastic constant of the foundation）。若此橫樑在其端點 $x=0$ 及 $x=l$ 均爲固定支承，且每單位長度受到均勻負載 W_0 之作用。證明在 $x=0$ 的彎矩爲

$$\frac{W_0}{2a}\left(\frac{\sinh al - \sin al}{\sinh al + \sin al}\right)$$

其中 $a=\sqrt[4]{k/4EI}$.

3.119 圖 3-21 所示爲電感性耦合（Coupled inductively）的初級及次級電路（Primary and secondary circuits）。

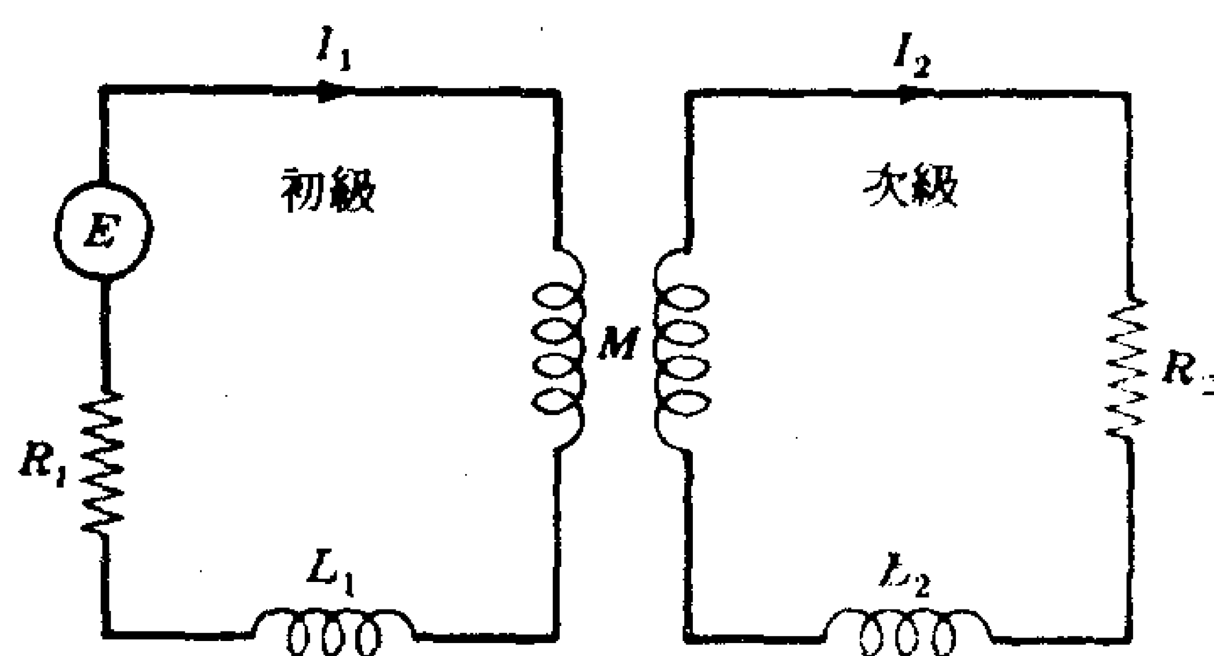


圖 3-21

(a) 若 M 爲互感（Mutual inductance），證明 I_1，I_2 滿足

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + R_1I_1 + M\frac{dI_2}{dt} = E$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + R_2I_2 + M\frac{dI_1}{dt} = 0$$

(b) 若在 $t=0$ 時，I_1，I_2 均爲零，證明在 $t>0$ 時，I_1，I_2 爲

$$I_1 = \frac{EL_2}{L_1L_2 - M^2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) + \frac{ER_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2}\right) + \frac{E}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{EM}{L_1L_2 - M^2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)$$

其中 α_1，α_2 爲下列方程式之根

$$(L_1L_2 - M^2)\alpha^2 + (L_1R_2 + L_2R_1)\alpha + R_1R_2 = 0$$

3.120 若 $L_1L_2 = M^2$ 討論 119 題。

第四章
積分及差分方程式方面的應用

4-1 積分方程式

積分方程式 (Integral equation) 之形式爲

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)\, Y(u)\, du \qquad (1)$$

其中$F(t)$及$K(u,t)$爲已知，a，b爲已知常數或是t的函數，我們所欲求得的函數，就是積分號內的函數$Y(t)$。

函數$K(u,t)$通常稱爲此積分方程式的**核**(kernal)。若a，b均爲常數，則原方程式稱爲**佛瑞德哈姆積分方程式** (Fredholm integral equation)，若a爲常數，$b=t$，則原方程式稱爲**沃太拉積分方程式** (Volterra integral equation)。

線性微分方程式可轉化爲積分方程式，參見 1 ～ 3 題及 25 題。

4-2 褶積型的積分方程式

有一種特殊的積分方程式在實用上很重要

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)\, Y(u)\, du \qquad (2)$$

此方程式爲**褶積型** (Convolution type)，可寫成

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t)$$

取拉氏變換，並假設$\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$及$\mathcal{L}\{K(t)\}=k(s)$均存在，則

$$y(s) = f(s) + k(s)\, y(s) \quad \text{即} \quad y(s) = \frac{f(s)}{1-k(s)}$$

可由反拉氏變換求解，參見第 5 ，6 題。

4·3 阿貝爾積分方程式及等時問題

一種重要的摺積型積分方程式，稱爲**阿貝爾積分方程式**(Abel's integral equation) 爲

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha} du = G(t) \tag{3}$$

其中$G(t)$已知，且α爲在0和1之間的常數。

阿貝爾積分方程式的應用爲：求出一落於垂直平面上之無摩擦鐵線的形狀，使得一珠子沿著鐵線滑落至最低點時，其所需的時間T和珠子的最初位置無關。此問題稱**等時問題**(Tantochrone problem)，此鐵線的形狀可被證明爲**擺線**(Cycloid)(見第7～9題)。

4·4 積分微分方程式

積分微分方程式(Integro-differential equation)爲包含未知函數$Y(t)$之導式的積分方程式。例如

$$Y''(t) = Y(t) + \sin t + \int_0^t \cos(t-u)\, Y(u)\, du \tag{4}$$

即爲一積分微分方程式。此類方程式再配合已知的起始條件，可用拉氏變換解之(見第10題)。

4·5 差分方程式

一方程式包含$Y(t)$及其他$Y(t-\alpha)$(其中α爲常數)的關係式，稱爲**差分方程式**(Difference equation)。

例題4.1

$Y(t)-4Y(t-1)+3Y(t-2)=t$ 爲差分方程式。

在許多應用方面，我們可以先建立差分方程式，再由其中解得特殊條件下的未知函數$Y(t)$。欲求$Y(t)$亦即解(Solving)差分方程式，常可利用拉氏變換來達成(見11題)。

差分方程式包含了數列a_0，a_1，$a_2\cdots$的關係式，例如$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$，其中$a_0=0$，$a_1=1$，可由拉氏變換解之，見18、19及24題。

4-6 微分差分方程式

微分差分方程式（Differential-difference equation）爲包含未知函數$Y(t)$之導式的差分方程式。例如

$$Y'(t) = Y(t-1) + 2t \tag{5}$$

即爲一微分差分方程式，見 12 題。

亦可能出現一種積分微分差分方程式，它是由未知函數$Y(t)$出現在積分號內的微分差分方程式所形成。

附解題

積分方程式

4.1 將下列微分方程式

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4\sin t, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = -2$$

改爲積分方程式。

圖 解 1：

令$Y''(t) = V(t)$，則利用第 2 章 23 題，並代入$Y'(0) = -2$及$Y(0) = 1$，可得

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du - 2, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du - 2t + 1$$

故微分方程式變爲

$$V(t) - 3\int_0^t V(u)\,du + 6 + 2\int_0^t (t-u)\,V(u)\,du - 4t + 2 = 4\sin t$$

即

$$V(t) = 4\sin t + 4t - 8 + \int_0^t \{3 - 2(t-u)\}\,V(u)\,du$$

解 2：

對所給之微分方程式兩邊積分，得

$$\int_0^t \{Y''(u) - 3Y'(u) + 2Y(u)\}\,du = \int_0^t 4\sin u\,du$$

即 $Y'(t) - Y'(0) - 3Y(t) + 3Y(0) + 2\int_0^t Y(u)\,du = 4 - 4\cos t$

代入 $Y'(0)=-2$ 及 $Y(0)=1$，上式變爲

$$Y'(t) - 3Y(t) + 2\int_0^t Y(u)\,du = -1 - 4\cos t$$

如同前面之方法，將上式由 0 至 t 積分，得

$$Y(t) - Y(0) - 3\int_0^t Y(u)\,du + 2\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du = -t - 4\sin t$$

即 $$Y(t) + \int_0^t \{2(t-u)-3\}\,Y(u)\,du = 1 - t - 4\sin t$$

4.2 將下列微分方程式

$$Y''(t) + (1-t)\,Y'(t) + e^{-t}\,Y(t) = t^3 - 5t, \quad Y(0) = -3, \quad Y'(0) = 4$$

轉化成積分方程式。

圖 解 1：

令 $Y''(t)=V(t)$ 且利用 $Y'(0)=4$，$Y(0)=-3$ 可得（如同第 1 題的解 1），

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du + 4, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 4t - 3$$

故微分方程式變爲

$$V(t) + (1-t)\int_0^t V(u)\,du + 4(1-t) + e^{-t}\int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 4t\,e^{-t} - 3e^{-t} = t^3 - 5t$$

可改寫成

$$V(t) = t^3 - t - 4 + 3e^{-t} - 4t\,e^{-t} + \int_0^t \{t - 1 - e^{-t}(t-u)\}\,V(u)\,du$$

解 2：

將原方程式兩邊積分（如同第 1 題，解 2）得

$$\int_0^t Y''(u)\,du + \int_0^t (1-u)\,Y'(u)\,du + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \int_0^t (u^3-5u)\,du$$

在第二個積分式中，利用部份積分，得

$$Y'(t) - Y'(0) + \left\{(1-u)Y(u)\Big|_0^t + \int_0^t Y(u)\,du\right\} + \int_0^t e^{-u}Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

即

$$Y'(t) - Y'(0) + (1-t)Y(t) - Y(0) + \int_0^t Y(u)\,du + \int_0^t e^{-u}Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

故 $$Y'(t) + (1-t)Y(t) + \int_0^t Y(u)\,du + \int_0^t e^{-u}Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 1$$

再從 0 至 t 積分得

$$Y(t) - Y(0) + \int_0^t (1-u)Y(u)\,du + \int_0^t (t-u)Y(u)\,du + \int_0^t (t-u)e^{-u}Y(u)\,du$$

$$= \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t$$

可寫成

$$Y(t) + \int_0^t \{1 + t - 2u + (t-u)e^{-u}\}Y(u)\,du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t - 3$$

4.3 將下列微分方程式轉化成積分方程式

$$Y^{\text{iv}}(t) - 4Y'''(t) + 6Y''(t) - 4Y'(t) + Y(t) = 3\cos 2t$$

但 $Y(0) = -1,\ Y'(0) = 4,\ Y''(0) = 0,\ Y'''(0) = 2.$

圖 **解 1**：

令 $Y^{\text{iv}}(t) = V(t)$，則如同在第 1 題及第 2 題的方法，可得

$$Y'''(t) = \int_0^t V(u)\,du + 2, \quad Y''(t) = \int_0^t (t-u)V(u)\,du + 2t$$

$$Y'(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}V(u)\,du + t^2 + 4, \quad Y(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^3}{3!}V(u)\,du + \frac{t^3}{3} + 4t - 1$$

將以上代入微分方程式，可得

$$V(t) = 25 - 16t + 4t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + 3\cos 2t + \int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \tfrac{1}{6}(t-u)^3\}V(u)\,du$$

解 2：

如同第 1，2 題的解 2，將原式從 0 至 t 積分，則可得積分方程式

$$Y(t) - \int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \tfrac{1}{6}(t-u)^3\}Y(u)\,du$$

$$= -\frac{19}{16} + 8t - \frac{85t^2}{8} + 5t^3 + \frac{3}{16}\cos 2t$$

這些積分方程式，亦如同第 1 ，2 題的方程式，都是**沃太拉積分方程式**（Volterra integral equations），其積分的上下限都是由 0 至 t 。一般而言，此種形式的積分方程式，均由某一點之各相關條件已知的線性微分方程式所轉化而得。**佛瑞德哈姆方程式**（Fredholm integral equation）則由某兩點之各相關條件已知的線性微分方程式而來，其例可參見 25 題。

4.4 將下面之積分方程式

$$Y(t) = 3t - 4 - 2\sin t + \int_0^t \{(t-u)^2 - 3(t-u) + 2\}\, Y(u)\, du$$

轉化成微分方程式。

解 利用萊普尼茨規則，

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} K(u,t)\, du = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K}{\partial t}\, du + K\{b(t),t\}\frac{db}{dt} - K\{a(t),t\}\frac{da}{dt} \tag{1}$$

將原式微分，可得

$$Y'(t) = 3 - 2\cos t + \int_0^t 2(t-u)\, Y(u)\, du - 3\int_0^t Y(u)\, du + 2Y(t) \tag{2}$$

再微分一次可得

$$Y''(t) = 2\sin t + 2\int_0^t Y(u)\, du - 3Y(t) + 2Y'(t) \tag{3}$$

再微分一次，即可得所需之微分方程式

$$Y'''(t) = 2\cos t + 2Y(t) - 3Y'(t) + 2Y''(t) \tag{4}$$

即 $$Y''' - 2Y'' + 3Y' - 2Y = 2\cos t$$

令 $t = 0$ ，代入原式及(2)，(3)式，可得起始條件爲

$$Y(0) = -4, \quad Y'(0) = -7, \quad Y''(0) = -2$$

注意到起始條件乃包含於原先之積分方程式中。

每一個線性微分方程式，均可轉化成積分方程式，然而並不是每一個積分方程式都可化成微分方程式，例如

$$Y(t) = \cos t + \int_0^t \ln(u+t)\, Y(u)\, du$$

摺積型的積分方程式

4.5 解下述之積分方程式 $Y(t) = t^2 + \int_0^t Y(u)\sin(t-u)\,du.$

解 原式可寫成

$$Y(t) = t^2 + Y(t) * \sin t$$

取拉氏變換，並應用摺積定理，可得（令 $y = \mathcal{L}\{Y\}$），

$$y = \frac{2}{s^3} + \frac{y}{s^2+1}$$

解得
$$y = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

故
$$Y = 2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4!}\right) = t^2 + \frac{1}{12}t^4$$

此答案可直接代入原式驗證之。

4.6 解下述之積分方程式 $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du = 16\sin 4t.$

解 原式可寫成

$$Y(t) * Y(t) = 16\sin 4t$$

取拉氏變換，得

$$\{y(s)\}^2 = \frac{64}{s^2+16} \quad \text{即} \quad y(s) = \frac{\pm 8}{\sqrt{s^2+16}}$$

得
$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \pm 8\,J_0(4t)$$

故 $Y(t) = 8J_0(4t)$ 及 $Y(t) = -8J_0(4t)$ 均爲所求之解。

阿貝爾積分方程式，等時問題

4.7 解 $\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}\,du = 1 + t + t^2.$

解 原式可寫成

$$Y(t) * t^{-1/2} = 1 + t + t^2$$

取拉氏變換得

$$\mathcal{L}\{Y\}\,\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \mathcal{L}\{1+t+t^2\}$$

即
$$\frac{y\,\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}$$

故
$$y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}+\frac{1}{s^{3/2}}+\frac{2}{s^{5/2}}\right\}$$

取反拉氏變換
$$Y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}+\frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)}+\frac{2t^{3/2}}{\Gamma(5/2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}(t^{-1/2}+2t^{1/2}+\tfrac{8}{3}t^{3/2}) = \frac{t^{-1/2}}{3\pi}(3+6t+8t^2)$$

此積分方程式爲阿貝爾積分方程式（Abel's integral equation）的特例。

4.8 一玻璃珠沿一無摩擦鐵線運動，且此鐵線落於一垂直平面上。假設此珠子由鐵線上之任意指定點下滑（由靜止起動，並僅受重力作用），求此珠子落至底端所需之時間。

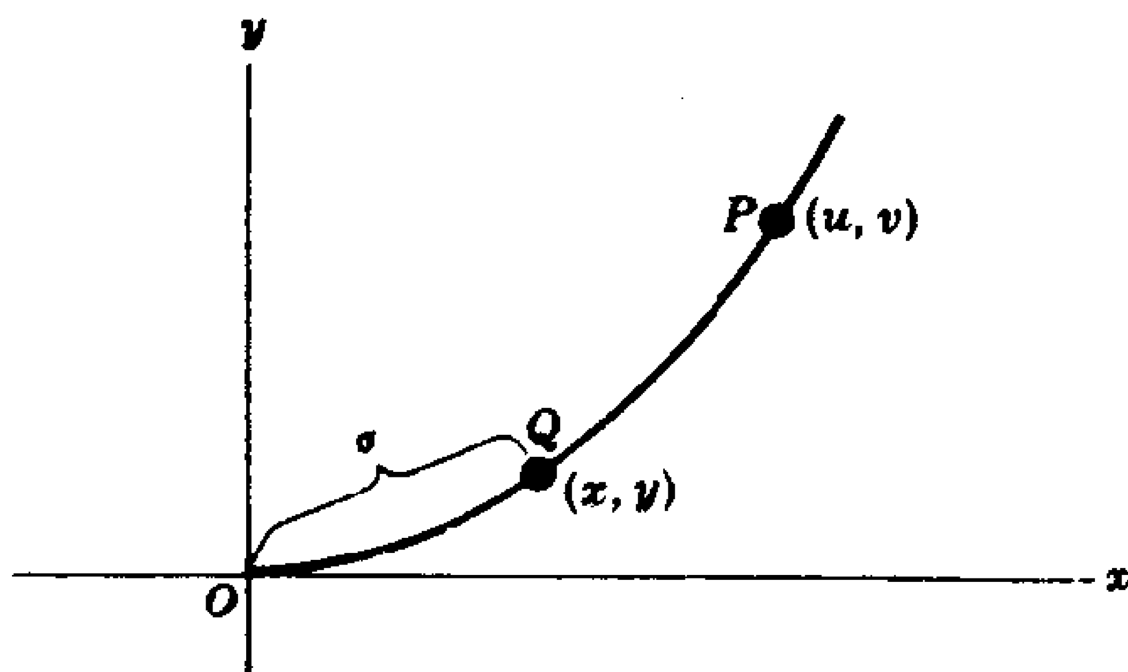


圖 4-1

解 假設此珠子之質量爲m，且自$P(u, v)$靜止起動，如圖 4-1 所示。$Q(x, y)$爲在此運動中所經過的任意點，且假設最低點爲原點O。令σ代表弧OQ的的長度，由能量守恒，可知

P點的位能＋P點的動能＝Q點的位能＋Q點的動能

$$\tfrac{1}{2}mgv + 0 = \tfrac{1}{2}mgy + \tfrac{1}{2}m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$$

其中$d\sigma/dt$爲質點在Q的瞬時速率，即

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2g(v-y)$$

但σ隨著t遞減，故

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)} \tag{1}$$

故此珠子由P滑至Q的總時間T爲

$$T = \int_0^T dt = \int_v^0 \frac{-d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} = \int_0^v \frac{d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} \tag{2}$$

若此滑形曲線的形狀已知，則弧長可以y表示之，故

$$d\sigma = F(y)\,dy \tag{3}$$

(2)式變爲

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^v \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{v-y}} \tag{4}$$

一般而言，T是v（起點）的函數。

4.9 若抵達最低點的時間爲一常數（和起點無關），求第8題的鐵線之形狀爲何？

解 在此情況下，我們必須求$F(y)$滿足

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^v \frac{F(y)}{\sqrt{v-y}}\,dy \tag{1}$$

其中T爲常數。褶積型積分方程式爲阿貝爾積分方程式（Abel's integral equation）的特例，故原式可寫成

$$\sqrt{2g}\,T = F(y) * y^{-1/2} \tag{2}$$

取拉氏變換，並代入 $\mathcal{L}\{F(y)\} = f(s)$, $\mathcal{L}\{y^{-1/2}\} = \Gamma(\frac{1}{2})/s^{1/2} = \sqrt{\pi}/s^{1/2}$ ，可得

$$\frac{\sqrt{2g}\,T}{s} = f(s)\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \quad \text{即} \quad f(s) = \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}\,s^{1/2}}$$

取反拉氏變換，得

$$F(y) = \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} = \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\frac{y^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}y^{-1/2}$$

但 $$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

故 $$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}y^{-1/2} \tag{3}$$

若令 $$\sqrt{b} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi} \quad 即 \quad b = \frac{2gT^2}{\pi^2} \tag{4}$$

則(3)式可寫成 $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{b}{y}$ 即 $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{b-y}{y}}$

（因爲斜率必爲正數）。積分後可得

$$x = \int \sqrt{\frac{b-y}{y}}\, dy + c \tag{5}$$

令 $y = b\sin^2\theta$，則上式可寫成

$$x = \int \sqrt{\frac{b\cos^2\theta}{b\sin^2\theta}} \cdot 2b\sin\theta\cos\theta\, d\theta + c$$

$$= 2b\int \cos^2\theta\, d\theta + c = b\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta + c = \frac{b}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c$$

故所求曲線的參數方程式爲

$$x = \frac{b}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c, \quad y = b\sin^2\theta = \frac{b}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

但此曲線必經 $x = 0$，$y = 0$，故 $c = 0$。再令

$$a = \frac{b}{2} = \frac{gT^2}{\pi^2} \quad 及 \quad \phi = 2\theta$$

曲線方程式則爲

$$x = a(\phi + \sin\phi), \quad y = a(1 - \cos\phi)$$

此即爲擺線的參數方程式（見下面之圖 4-2）。對於一給定的T而言，曲線的外形即如圖中實線所示。當滾輪沿一直線滾動時，滾輪邊線上任一點形成的軌跡即爲擺線（見第 44 題）。

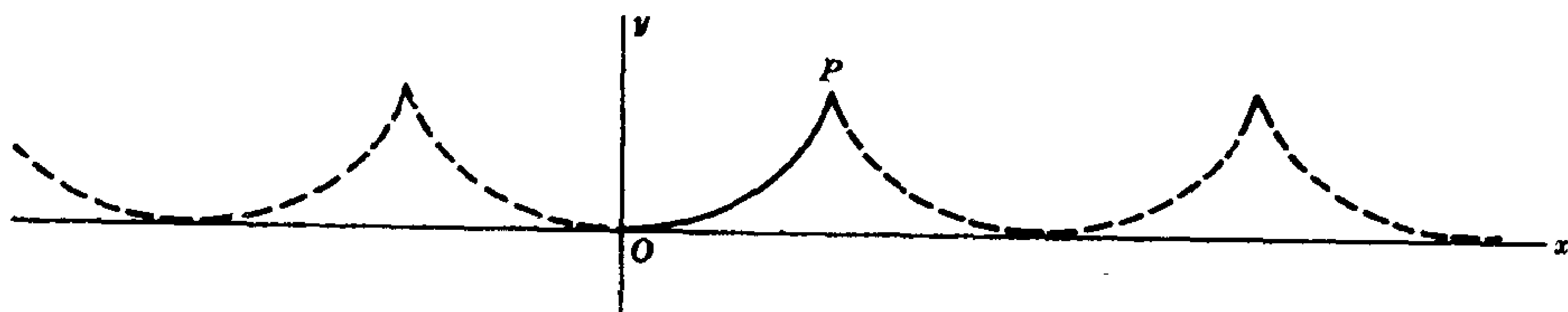


圖 4-2

積分微分方程式

4.10 解 $Y'(t) + 5\int_0^t \cos 2(t-u)\, Y(u)\, du = 10$，其中 $Y(0)=2.$

圖 原式可寫成

$$Y'(t) + 5\cos 2t * Y(t) = 10$$

取拉氏變換，得

$$sy - Y(0) + \frac{5sy}{s^2+4} = \frac{10}{s}$$

即
$$y = \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$$

再由第2章第44題可得

$$Y = \frac{1}{27}(24 + 120t + 30\cos 3t + 50\sin 3t)$$

將原式由0至t積分，並利用$Y(0)=2$，則原先之積分微分方程式可轉化成積分方程式

$$Y(t) + 5\int_0^t (t-u)\cos 2(t-u)\, Y(u)\, du = 10t + 2$$

差分及微分差分方程式

4.11 解 $3Y(t) - 4Y(t-1) + Y(t-2) = t$ 其中若 $t<0$，則$Y(t)=0$。

圖 取拉氏變換，得

$$3\mathcal{L}\{Y(t)\} - 4\mathcal{L}\{Y(t-1)\} + \mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \tag{1}$$

但
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{Y(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t-1)\, dt \\ &= \int_{-1}^\infty e^{-s(u+1)}\, Y(u)\, du \qquad [\text{令 } t = u+1] \\ &= e^{-s}\int_{-1}^0 e^{-su}\, Y(u)\, du + e^{-s}\int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\ &= e^{-s}y\end{aligned}$$

且
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t-2)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,Y(t-2)\,dt \\
&= \int_{-2}^\infty e^{-s(u+2)}\,Y(u)\,du \qquad [\text{令 } t=u+2] \\
&= e^{-2s}\int_{-2}^0 e^{-su}\,Y(u)\,du + e^{-2s}\int_0^\infty e^{-su}\,Y(u)\,du \\
&= e^{-2s}\,y
\end{aligned}$$

又因當 $u<0$ 時，$Y(u)=0$，故

$$\int_{-1}^0 e^{-su}\,Y(u)\,du = 0 \qquad 且 \qquad \int_{-2}^0 e^{-su}\,Y(u)\,du = 0$$

所以(1)式可寫成

$$3y - 4e^{-s}y + e^{-2s}y = \frac{1}{s^2}$$

即
$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{s^2(3-4e^{-s}+e^{-2s})} = \frac{1}{s^2(1-e^{-s})(3-e^{-s})} \\
&= \frac{1}{2s^2}\left\{\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3-e^{-s}}\right\} \\
&= \frac{1}{2s^2}\left\{\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3(1-e^{-s}/3)}\right\} \\
&= \frac{1}{2s^2}\left\{(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots) - \frac{1}{3}\left(1+\frac{e^{-s}}{3}+\frac{e^{-2s}}{3^2}+\frac{e^{-3s}}{3^3}+\cdots\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\frac{e^{-ns}}{s^2}
\end{aligned}$$

故
$$Y = \frac{t}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[t]}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)(t-n)$$

其中 $[\,t\,]$ 爲小於或等於 t 的最大整數。

4.12 解 $Y'(t)+Y(t-1)=t^2$ 其中若 $t\le 0$，則 $Y(t)=0$

㗊 取拉氏變換，得

$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t-1)\} = 2/s^3 \qquad (1)$$

其中 $\quad \mathcal{L}\{Y'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{Y\} - Y(0) = sy - 0 = sy$

且

$$\mathcal{L}\{Y(t-1)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,Y(t-1)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{\infty} e^{-s(u+1)} Y(u)\, du \qquad [\text{令 } t = u+1]$$

$$= e^{-s}\int_{-1}^{0} e^{-su} Y(u)\, du + e^{-s}\int_{0}^{\infty} e^{-su} Y(u)\, du$$

$$= e^{-s} y$$

但若 $u \leq 0$ 時，$Y(u)=0$，故 $\int_{-1}^{0} e^{-su} Y(u)\, du = 0$. 所以(1)式可寫成

$$sy + e^{-s} y = \frac{2}{s^3} \quad \text{即} \quad y = \frac{2}{s^3(s+e^{-s})}$$

利用級數，可得

$$y = \frac{2}{s^3(s+e^{-s})} = \frac{2}{s^4(1+e^{-s}/s)}$$

$$= \frac{2}{s^4}\left(1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{s^4} - \frac{2e^{-s}}{s^5} + \frac{2e^{-2s}}{s^6} - \frac{2e^{-3s}}{s^7} + \cdots$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}$$

但

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\} = \begin{cases} \dfrac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \geqq n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若 $[t]$ 代表小於或等於 t 的最大整數，則

$$Y(t) = 2\sum_{n=0}^{[t]} \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} \tag{2}$$

4.13 在 12 題中，求(a) $Y(4)$，(b) $Y(\pi)$。

答 (a) 因 $[4]=4$，故

$$Y(4) = 2\sum_{n=0}^{4} \frac{(4-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2\left\{\frac{4^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{1^6}{6!}\right\} = 28.62 \ (\text{近似值})$$

(b) 因 $[\pi]=3$，故

$$Y(\pi) = 2\sum_{n=0}^{3} \frac{(\pi-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2\left\{\frac{\pi^3}{3!} + \frac{(\pi-1)^4}{4!} + \frac{(\pi-2)^5}{5!} + \frac{(\pi-3)^6}{6!}\right\} = 12.12 \ (\text{近似值})$$

4.14 若$F(t)=r^n$其中$n\leq t<n+1$，$n=0,1,2,,\cdots$，求$\mathcal{L}\{F(t)\}$

答

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt\\ &= \int_0^1 e^{-st}r^0\,dt+\int_1^2 e^{-st}r^1\,dt+\int_2^3 e^{-st}r^2\,dt+\cdots\\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}+r\left(\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right)+r^2\left(\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}\right)+\cdots\\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}(1+re^{-s}+r^2e^{-2s}+\cdots)\\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{1}{1-re^{-s}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\end{aligned}$$

4.15 求$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$.

答 由14題，可得$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}=F(t)=r^n$ 其中$n\leq t<n+1$。

另解：

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{1}{1-re^{-s}}\\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}(1+re^{-s}+r^2e^{-2s}+\cdots)\\ &= \int_0^1 e^{-st}r^0\,dt+\int_1^2 e^{-st}r^1\,dt+\int_2^3 e^{-st}r^2\,dt+\cdots\\ &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt\end{aligned}$$

其中$F(t)=r^n$且$n\leq t<n+1$，$n=0,1,2,3,\cdots$

4.16 求$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$.

答 若$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=F(t)$，則由第2章之定理2-4，可得

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}f(s)\} = \begin{cases}F(t-1) & t>1\\ 0 & t<1\end{cases}$$

再由15題，得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t-1) = r^n \quad 其中\ n\leqq t-1<n+1,\ n=0,1,2,3,\ldots$$

或者也可寫成

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = r^{n-1} \quad 其中 \quad n \leqq t < n+1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

4.17 令 $Y(t) = a_n$ 其中 $n \leq t < n+1$ 且 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 將下列二式以 $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$ 表之(a) $\mathcal{L}\{Y(t+1)\}$ 及(b) $\mathcal{L}\{Y(t+2)\}$

解 (a) 令 $t+1 = u$，得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t+1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t+1)\, dt = e^s \int_1^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\
&= e^s \int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du - e^s \int_0^1 e^{-su}\, Y(u)\, du \\
&= e^s y(s) - e^s \int_0^1 e^{-su} a_0\, du = e^s y(s) - \frac{a_0 e^s(1-e^{-s})}{s}
\end{aligned}$$

其中用到 $Y(t) = a_0$，$0 \leq t < 1$

(b) 令 $t+2 = u$，得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t+2)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t+2)\, dt \\
&= e^{2s} \int_2^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\
&= e^{2s}\left\{\int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du - \int_0^1 e^{-su}\, Y(u)\, du - \int_1^2 e^{-su}\, Y(u)\, du\right\} \\
&= e^{2s} y(s) - e^{2s}\int_0^1 e^{-su} a_0\, du - e^{2s}\int_1^2 e^{-su} a_1\, du \\
&= e^{2s} y(s) - \frac{a_0 e^{2s}(1-e^{-s})}{s} - \frac{a_1 e^{2s}(e^{-s}-e^{-2s})}{s} \\
&= e^{2s} y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})(a_0 e^s + a_1)}{s}
\end{aligned}$$

其中用到 $Y(t) = a_0$，$0 \leq t < 1$ 及 $Y(t) = a_1$，$1 \leq t < 2$ 。

4.18 令 $\{a_n\}$，$n = 0, 1, 2\cdots$，代表常數 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 所形成之數列，且假設數列滿足下列由差分方程式所定義的**遞迴公式**(Recursion formula)

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

試求 a_n（亦即解上述之差分方程式）。

解 定義函數

$$Y(t) = a_n, \quad n \leqq t < n+1 \quad 其中\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

則原先之遞迴公式變為

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = 0 \tag{1}$$

取(1)式之拉氏變換，並令 $a_0=0$，$a_1=1$ 代入17題之結果，得

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} - 5e^s y(s) + 6y(s) = 0$$

即

$$(e^{2s}-5e^s+6)\,y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}$$

故

$$y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s}-5e^s+6)} = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{(e^s-3)(e^s-2)}\right\}$$

$$= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{e^s-3}-\frac{1}{e^s-2}\right\} = \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}}-\frac{1}{1-2e^{-s}}\right\}$$

再由15題，並取反拉氏變換，得

$$a_n = 3^n - 2^n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

驗算：若 $a_n = 3^n - 2^n$，則 $a_0=0$，$a_1=1$，故

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n &= (3^{n+2}-2^{n+2}) - 5(3^{n+1}-2^{n+1}) + 6(3^n-2^n) \\ &= 9\cdot 3^n - 4\cdot 2^n - 15\cdot 3^n + 10\cdot 2^n + 6\cdot 3^n - 6\cdot 2^n = 0 \end{aligned}$$

4.19 解下列差分方程式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4^n, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

答 此題和18題唯一不同點，乃是等號右邊多了 4^n，將原式寫為

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = F(t) \tag{1}$$

其中 $Y(t) = a_n$, $F(t) = 4^n$ 且 $n \leq t < n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$

將(1)式兩邊各取拉氏變換，並利用14，17題之結果，可得（令 $y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$）

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s}{s}(1-e^{-s}) - 5e^s y(s) + 6y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-4e^{-s})}$$

故

$$y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-2)(e^s-3)} + \frac{1-e^{-s}}{s(e^s-2)(e^s-3)(1-4e^{-s})}$$

$$= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{e^s-3}-\frac{1}{e^s-2}\right\} + \frac{e^s-1}{s(e^s-2)(e^s-3)(e^s-4)}$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}}-\frac{1}{1-2e^{-s}}\right\} + \frac{e^s-1}{s}\left\{\frac{1/2}{e^s-2}-\frac{1}{e^s-3}+\frac{1/2}{e^s-4}\right\}$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}}\right\} + \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1/2}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-3e^{-s}} + \frac{1/2}{1-4e^{-s}}\right\}$$

取反拉氏變換，並利用 15 題之結果，得

$$Y(t) = a_n = 3^n - 2^n + \tfrac{1}{2}\cdot 2^n - 3^n + \tfrac{1}{2}\cdot 4^n \qquad (2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 4^n - \tfrac{1}{2}\cdot 2^n = \tfrac{1}{2}(4^n - 2^n)$$

4.20 在 19 題中，求 a_5。

答 **解 1**：由 19 題(2)式，可得

$$a_5 = \tfrac{1}{2}(4^5 - 2^5) = 496$$

解 2：將 $n=0$ 代入 19 題所給之差分方程式，得

$$a_2 - 5a_1 + 6a_0 = 1$$

代入 $a_0=0$ ，$a_1=1$ 得

$$a_2 = 1 + 5a_1 - 6a_0 = 6$$

若 $n=1$ ，$a_3 - 5a_2 + 6a_1 = 4$ 故

$$a_3 = 4 + 5a_2 - 6a_1 = 28$$

若 $n=2$ ，$a_4 - 5a_3 + 6a_2 = 16$ 故

$$a_4 = 16 + 5a_3 - 6a_2 = 16 + 5(28) - 6(6) = 120$$

最後若 $n=3$ ，$a_5 - 5a_4 + 6a_3 = 64$ 故

$$a_5 = 64 + 5a_4 - 6a_3 = 64 + 5(120) - 6(28) = 496$$

其他各類問題

4.21 解下列積分方程式

$$Y(t) = \tfrac{1}{2}\sin 2t + \int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du$$

答 原式可寫成

$$Y(t) = \tfrac{1}{2}\sin 2t + Y(t) * Y(t)$$

取拉氏變換，並利用摺積定理，得

$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \{y(s)\}^2 \quad 即 \quad \{y(s)\}^2 - y(s) + \frac{1}{s^2+4} = 0$$

解得

$$y(s) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{s^2+4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

故
$$y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}}\right) \tag{1}$$

或
$$y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right) \tag{2}$$

由(2)式可得

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)\right\} = J_1(2t) \tag{3}$$

而(1)式可寫成

$$y(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}} - 2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)$$

故另一答案爲

$$Y(t) = \delta(t) - J_1(2t) \tag{4}$$

其中 $\delta(t)$ 爲脈衝函數

(3)式之解答在 $t > 0$ 時爲連續且有界。

4.22 求 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ 其中 $F(t) = n,\ n \leqq t < n+1,\ n = 0,1,2,3,\cdots$

圖 如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}(0)\,dt + \int_1^2 e^{-st}(1)\,dt + \int_2^3 e^{-st}(2)\,dt + \cdots \\
&= (1)\left(\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right) + (2)\left(\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}\right) + (3)\left(\frac{e^{-3s}-e^{-4s}}{s}\right) + \cdots \\
&= \frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s}(1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + 4e^{-3s} + \cdots)
\end{aligned}$$

當 $|x| < 1$ 時，下式成立

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

微分後，可得

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

若 $x = e^{-s}$，則

$$1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + \cdots = \frac{1}{(1-e^{-s})^2}$$

故 $$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

4.23 在(a) $r \neq 1$ ，(b) $r = 1$ 時，分別求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$

解 (a) 由二項式公式

$$\begin{aligned}\frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{e^{-s}}{s}(1 + re^{-s} + r^2e^{-2s} + \cdots) \\ &= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{re^{-2s}}{s} + \frac{r^2e^{-3s}}{s} + \cdots \\ &= \mathcal{U}(t-1) + r\,\mathcal{U}(t-2) + r^2\,\mathcal{U}(t-3) + \cdots\end{aligned}$$

故 $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k \qquad (1)$$

其中 $t \geq 1$ 。若 $t < 1$ 時，原式爲零 。

若 $n \leq t < n+1$ ，且 $r \neq 1$ 則(1)可化簡成

$$r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r(r^n-1)}{r-1} \qquad (2)$$

(b) 若 $r = 1$，則 $F(t) = n$ ， $n \leq t < n+1$ 此結果和 22 題一致。

4.24 解下列差分方程式

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 16n, \quad a_0 = 6,\ a_1 = 2$$

解 原式可寫成

$$Y(t+2) - 7Y(t+1) + 10Y(t) = F(t) \qquad (1)$$

其中 $Y(t) = a_n$, $F(t) = 16n$，且 $n \leq t < n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

利用 17 及 22 題，(1)式的拉氏變換爲

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s} - 7e^s y(s) + \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s} + 10y(s) = \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

$$y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s(e^s-5)(e^s-2)} - \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-5)(e^s-2)} + \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})(e^s-5)(e^s-2)}$$

$$= e^s\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{6e^s+2}{(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$

$$- 42\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{e^s}{(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$

$$+ \frac{16}{s}\left\{\frac{1}{(e^s-1)(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$

$$= e^s\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{32/3}{e^s-5} - \frac{14/3}{e^s-2}\right\}$$

$$- 42\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{5/3}{e^s-5} - \frac{2/3}{e^s-2}\right\}$$

$$+ \frac{1}{s}\left\{\frac{4}{e^s-1} + \frac{4/3}{e^s-5} - \frac{16/3}{e^s-2}\right\}$$

$$= \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{32/3}{1-5e^{-s}} - \frac{14/3}{1-2e^{-s}}\right\}$$

$$- \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{70e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{28e^{-s}}{1-2e^{-s}}\right\}$$

$$+ \frac{1}{s}\left\{\frac{4e^{-s}}{1-e^{-s}} + \frac{(4/3)e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{(16/3)e^{-s}}{1-2e^{-s}}\right\}$$

再由 14 及 22 題，當≥1 時

$$a_n = \frac{32}{3}\cdot 5^n - \frac{14}{3}\cdot 2^n - 70\cdot 5^{n-1} + 28\cdot 2^{n-1} + 4(n-1) + \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}(5^n-1) - \frac{16}{3}\cdot\frac{2}{1}(2^n-1)$$

$$= 4\cdot 2^n - 3\cdot 5^n + 4n + 5$$

4.25 將下列微分方程式

$$Y''(t) + \lambda Y(t) = 0, \quad Y(0)=0,\ Y(1)=0$$

轉化成積分方程式（其中 λ 爲常數）。

圖 解 1：

令 $Y''(t)=V(t)$，若 $Y'(0)=c$，則

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du + c, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + ct \tag{1}$$

但 $Y(1)=0$，故

$$\int_0^1 (1-u)\,V(u)\,du + c = 0 \quad \text{即} \quad c = \int_0^1 (u-1)\,V(u)\,du$$

再由(1)式，可得

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + \int_0^1 (tu-t)\,V(u)\,du \\ &= \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + \int_0^t (tu-t)\,V(u)\,du + \int_t^1 (tu-t)\,V(u)\,du \\ &= \int_0^t (t-1)\,u\,V(u)\,du + \int_t^1 (u-1)\,t\,V(u)\,du \end{aligned}$$

上式可寫成 $\qquad Y(t) = \int_0^1 K(t,u)\,V(u)\,du$

其中 $K(t,u) = \begin{cases}(t-1)\,u & u<t \\ (u-1)\,t & u>t\end{cases}$. [注意到 $K(t,u)=K(u,t)$，亦即 $K(t,u)$ 是對稱的（Symmetric）。

故所求之積分方程式為

$$V(t) + \lambda\int_0^1 K(t,u)\,V(u)\,du = 0$$

即 $\qquad V(t) = -\lambda\int_0^1 K(t,u)\,V(u)\,du$

解 2：

將所給之微分方程式自 0 至 t 積分，得

$$Y'(t) - Y'(0) + \lambda\int_0^t Y(u)\,du = 0$$

再一次自 0 至 t 積分之，得

$$Y(t) - Y(0) - Y'(0)\,t + \lambda\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du = 0 \tag{1}$$

但 $Y(0)=0$，故(1)式變為

$$Y(t) = Y'(0)t - \lambda \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du \tag{2}$$

令 $t=1$ 代入(2)式，並利用 $Y(1)=0$，得

$$Y'(0) = \lambda \int_0^1 (1-u)\, Y(u)\, du$$

故(2)式可寫成

$$\begin{aligned} Y(t) &= \lambda \int_0^1 (t-tu)\, Y(u)\, du - \lambda \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du \\ &= \lambda \int_0^t (t-tu)\, Y(u)\, du + \lambda \int_t^1 (t-tu)\, Y(u)\, du - \lambda \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du \\ &= \lambda \int_0^t u(1-t)\, Y(u)\, du + \lambda \int_t^1 t(1-u)\, Y(u)\, du \\ &= -\lambda \int_0^1 K(t,u)\, Y(u)\, du \end{aligned}$$

其中 $K(t,u) = \begin{cases} (t-1)u & u<t \\ (u-1)t & u>t \end{cases}$.

在此所求得之積分方程式，即爲具有對稱核的佛瑞德哈姆積分方程式的一例。

補充題

積分方程式

將下列各微分方程式轉化成積分方程式

4.26 $Y''(t) + 2Y'(t) - 8Y(t) = 5t^2 - 3t, \quad Y(0) = -2,\ Y'(0) = 3.$

答 $V(t) + \int_0^t (2-8t+8u)\, V(u)\, du = 5t^2 + 21t - 22, \quad V(t) = Y''(t)$

或 $Y(t) + \int_0^t (2-8t+8u)\, Y(u)\, du = -2 - t + 5t^4/12 - t^3$

4.27 $2Y''(t) - 3Y'(t) - 2Y(t) = 4e^{-t} + 2\cos t, \quad Y(0) = 4,\ Y'(0) = -1.$

答 $2V(t) + \int_0^t (2u-2t-3)\, V(u)\, du = 4e^{-t} + 2\cos t + 5 - 2t, \quad V(t) = Y''(t)$

或 $2Y(t) + \int_0^t (2u-2t-3)\, Y(u)\, du = 6 - 10t + 4e^{-t} - 2\cos t$

4.28 $Y'''(t) + 8Y(t) = 3\sin t + 2\cos t, \quad Y(0) = 0,\ Y'(0) = -1,\ Y''(0) = 2.$

答

$$V(t) + 4\int_0^t (t-u)^2\, V(u)\, du = 3\sin t + 2\cos t - 4t^2 + 4t, \quad V(t) = Y'''(t)$$

或 $$Y(t) + 4\int_0^t (t-u)^2\, Y(u)\, du = 5t^2/2 + t - 3 + 3\cos t - 2\sin t$$

4.29 $Y''(t) + \cos t\, Y(t) = e^{-t}, \quad Y(0) = -2,\ Y'(0) = 0.$

答 $$V(t) + \int_0^t (t-u)\cos t\, V(u)\, du = e^{-t} + 2\cos t, \quad V(t) = Y''(t)$$

或 $$Y(t) + \int_0^t (t-u)\cos u\, Y(u)\, du = t - 3 + e^{-t}$$

4.30 $Y''(t) - tY'(t) + t^2 Y(t) = 1 + t, \quad Y(0) = 4,\ Y'(0) = 2.$

答 $$V(t) + \int_0^t (t^3 - t - ut^2)\, V(u)\, du = 1 + 3t - 4t^2 - 2t^3, \quad V(t) = Y''(t)$$

或 $$Y(t) - \int_0^t (t - 2u + tu^2 - u^3)\, Y(u)\, du = t^2/2 + t^3/6 + 2t + 4$$

4.31 $Y^{iv}(t) - 2tY''(t) + (1-t^2)Y(t) = 1 + 4t - 2t^2 + t^4,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 0,\ Y''(0) = -2,\ Y'''(0) = 0.$

答 $$V(t) + \int_0^t \{\tfrac{1}{6}(t-u)^3(1-t^2) - 2t(t-u)\}\, V(u)\, du = 0, \quad V(t) = Y^{iv}(t)$$

或 $$Y(t) - \int_0^t \{2u(t-u) + 2(t-u)^2 + \tfrac{1}{6}(t-u)^3(1-u^2)\}\, Y(u)\, du$$
$$= 1 - t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{180} + \frac{t^8}{1680}$$

將下列各積分方程式轉化成微分方程式及相關的條件。

4.32 $Y(t) = 5\cos t + \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du$

答 $Y''(t) - Y(t) = -5\sin t, \quad Y(0) = 5,\ Y'(0) = 0$

4.33 $Y(t) = t^2 - 3t + 4 - 3\int_0^t (t-u)^2\, Y(u)\, du$

答 $Y'''(t) + 6Y(t) = 0, \quad Y(0) = 4,\ Y'(0) = -3,\ Y''(0) = 2$

4.34 $Y(t) + \int_0^t \{(t-u)^2 + 4(t-u) - 3\}\, Y(u)\, du = e^{-t}$

答 $Y'''(t) - 3Y''(t) + 4Y'(t) + 2Y(t) = -e^{-t},\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 2,\ Y''(0) = 3$

4.35 $Y(t) - \int_0^t (t-u)\sec t\, Y(u)\, du = t$

答 $Y''(t) - 2\tan t\, Y'(t) - (1 + \sec t)\, Y(t) = -t - 2\tan t, \quad Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1$

4.36 $Y(t) + \int_0^t (t^2 + 4t - ut - u - 2)\, Y(u)\, du = 0$

答 $Y'''(t)+(3t-2)Y''(t)+(t-10)Y'(t)+Y(t)=0,\quad Y(0)=0,\ Y'(0)=0,\ Y''(0)=0$

摺積型的積分方程式

4.37 解 $Y(t)=t+2\int_0^t \cos(t-u)\,Y(u)\,du.$

答 $Y(t)=t+2+2(t-1)e^t$

4.38 (a) 證明下列積分方程式

$$Y(t)=t+\frac{1}{6}\int_0^t (t-u)^3\,Y(u)\,du$$

之解爲 $Y(t)=\frac{1}{2}(\sin t+\sinh t).$

(b) (a)之解是否爲唯一？解釋之。

4.39 求積分方程式 $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du=2Y(t)+t-2.$ 的連續解（Continuous Solution）。

答 $Y(t)=1$

4.40 證明積分方程式 $\int_0^t Y(u)\sin(t-u)\,du=Y(t)$ 的唯一解爲顯明解（Trivial Solution）$Y(t)=0$。

4.41 討論積分方程式 $\int_0^t Y(u)\,G(t-u)\,du=Y(t).$ 的解。

阿貝爾積分方程式及等時問題

4.42 解積分方程式 $\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}\,du=\sqrt{t}.$ 答 $Y(t)=\frac{1}{2}$

4.43 證明積分方程式 $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/3}}\,du=t(1+t)$ 之解爲 $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}t^{1/3}(3t+2).$

4.44 一半徑爲 a 之圓輪（見圖 4-3）沿一直線（設爲 x 軸）滾動。證明其邊緣上一點 O'（原先和原點 O 重合）之軌跡爲一擺線

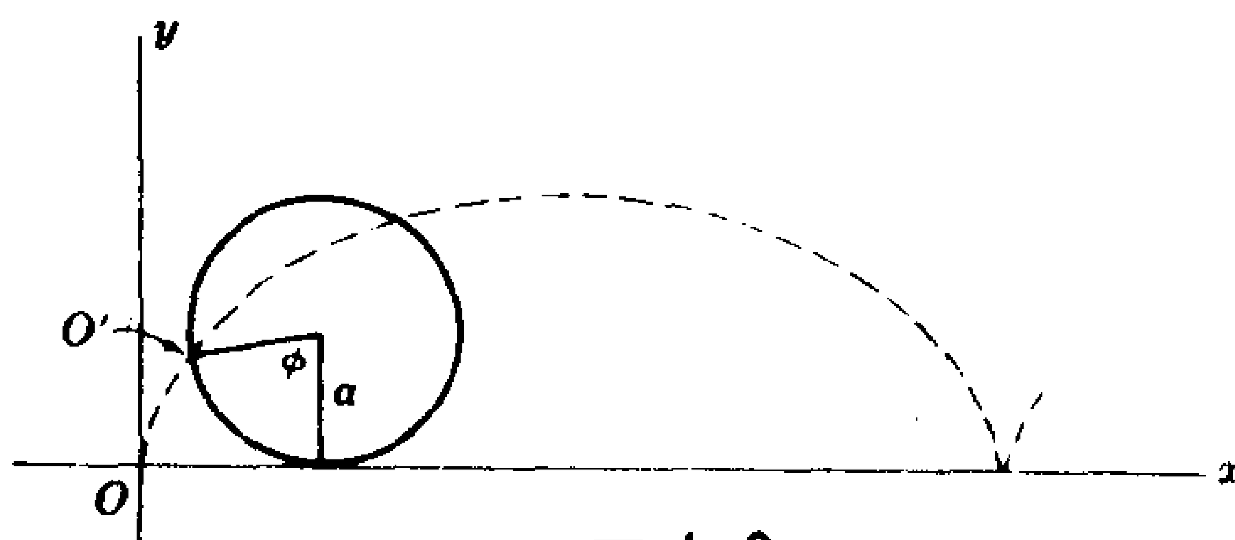


圖 4-3

$$x = a(\phi - \sin\phi), \quad y = a(1 - \cos\phi)$$

如圖 4-3 中的虛線所示。

4.45 證明第 8 題的等時問題中提到的曲線，即爲擺線，並討論此曲線和第 44 問的曲線有何關連。

4.46 證明在第 8 及第 9 題中，珠子自最高點 P 滑至最低點 O（擺線的最低點）所需之時間爲 $\pi\sqrt{a/g}$。

4.47 若 $0 < \alpha < 1$，證明 $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha}\,du = F(t)$（假設 $F(0)=0$）之解爲

$$Y(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^t F'(u)\,(t-u)^{\alpha-1}\,du$$

4.48 若 $F(0) \neq 0$，討論第 47 題積分方程式的解。考慮下式，並由此發表你的評論。

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/2}}\,du = 1 + t$$

積微分方程式

4.49 解 $\int_0^t Y(u)\cos(t-u)\,du = Y'(t)$，已知 $Y(0) = 1$.

答 $Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$

4.50 解 $\int_0^t Y'(u)\,Y(t-u)\,du = 24t^3$，已知 $Y(0) = 0$.

答 $Y(t) = \pm 16^{3/2}\sqrt{T}$,

4.51 (a) 證明第 49 題的積分方程式可改寫成以下的積分方程式

$$1 + \int_0^t (t-u)\,Y(u)\cos(t-u)\,du = Y(t)$$

(b) 解(a)中的積分方程式。

4.52 解 $\int_0^t Y''(u)\,Y'(t-u)\,du = Y'(t) - Y(t)$，已知 $Y(0) = Y'(0) = 0$.

答 $Y(t) = 0$

差分及微分差分方程式

4.53 解 $Y(t)-3Y(t-1)+2Y(t-2)=1$ 其中 $Y(t)=0,\ t<0.$

答 $Y(t)=2^{[t]+2}-[t]-3$

4.54 證明$Y'(t)=2Y(t-1)+t$（但當 $t<0$ 時，$Y(t)=0$）之解爲

$$Y(t)=\sum_{n=0}^{[t]}\frac{2^n(t-n)^{n+2}}{(n+2)!}$$

4.55 解 $Y''(t)-Y(t-1)=F(t)$ 其中當 $t<0$時 $Y(t)=0,\ Y'(t)=0$，且

$$F(t)=\begin{cases}0 & t\leqq 0\\ 2t & t>0\end{cases}$$

答 $Y(t)=2\sum_{n=0}^{[t]}\frac{(t-n)^{2n+3}}{(2n+3)!}$

4.56 解 $3Y(t)-5Y(t-1)+2Y(t-2)=F(t)$ 但當 $t<0$時$Y(t)=0$，且

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t^2 & t>0\end{cases}$$

答 $Y(t)=\sum_{n=0}^{[t]}\{1-(\frac{2}{3})^{n+1}\}(t-n)^2$

4.57 解下列各差分方程式

(a) $3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$，已知 $a_0=1,\ a_1=0.$

(b) $a_{n+2}+2a_{n+1}-3a_n=0$，已知 $a_0=0,\ a_1=1.$

答 (a) $3(2/3)^n-2$, (b) $\frac{1}{4}\{1-(-3)^n\}$

4.58 費布那希數字（Fibonacci numbers）乃由下式所定義：$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，其中$a_0=0$，$a_1=1$。(a)求出前十個費布那希數字，(b)找出 a_n的公式。

答 (a) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (b) $a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right\}$

4.59 解下列方程式 $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ 其中 $a_0=1,\ a_1=4.$ 答．$a_n=2^n(n+1)$

4.60 解下列方程式 $a_{n+2}-2a_{n+1}+2a_n=0$ 其中 $a_0=0,\ a_1=1.$

答 $a_n=\{(1+i)^n-(1-i)^n\}/2i$

4.61 (a) 解 $a_{n+3}-2a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n=0$ 已知 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=1.$ (b)求 a_{10}

答 (a) $a_n=\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}$, (b) $a_{10}=341$

4.62 (a) 令 $a_n = r^n$（r 為未知常數），指出如何藉此以求 $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$ 之解。
(b) 利用此法去解 57 ～ 61 題。

其他各類問題

4.63 證明以下之非線性微分方程式

$$Y''(t) + \{Y(t)\}^2 = t \sin t, \qquad Y(0) = 1,\ Y'(0) = -1$$

可寫成積分方程式為：

$$Y(t) + \int_0^t (t-u)\{Y(u)\}^2\,du = 3 - t - 2\cos t - t\sin t$$

4.64 解 $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du = 2Y(t) + \frac{1}{6}t^3 - 2t.$

答 $Y(t) = t$ 即 $Y(t) = 2\delta(t) - t$

4.65 將下式轉化成積分方程式 $Y''(t) - Y(t) = 3\cos t - \sin t, \quad Y(\pi) = 1,\ Y'(\pi) = -2.$

答 $V(t) = 2\pi + 1 - 2t + 3\cos t - \sin t + \int_\pi^t (t-u)\,V(u)\,du,$ 其中 $V(t) = Y''(t)$

4.66 解 $Y(t) = t + \int_0^t Y(u)\,J_1(t-u)\,du.$

答 $Y(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)\int_0^t J_0(u)\,du + \frac{1}{2}t\,J_0(t) - \frac{1}{2}t^2 J_1(t)$

4.67 求 $G(x)$ 使其滿足 $\int_0^x G(u)\,G(x-u)\,du = 8(\sin x - x\cos x).$

答 $G(x) = \pm 4\sin x$

4.68 解 $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du = t + 2Y(t).$

答 $Y(t) = J_1(t) - \int_0^t J_0(u)\,du$ 即 $Y(t) = 2\delta(t) - J_1(t) + \int_0^t J_0(u)\,du$

4.69 利用拉氏變換，解下列各差分方程式

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2n + 1, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$

(b) $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 24n - 8, \quad a_0 = 3,\ a_1 = -5.$

答 (a) $a_n = \frac{5}{2}\cdot 3^n - 5\cdot 2^n + n + \frac{5}{2}$ (b) $a_n = 2n^2 - 4n + 2 + (-5)^n$

4.70 解 (a) $a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n = n+2, \quad a_0=0,\ a_1=0.$

(b) $a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n = 2^n, \quad a_0=0,\ a_1=0.$

答 (a) $a_n = \frac{1}{4}(3n-1)(-1)^n+\frac{1}{4}(n+1)$ (b) $a_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\cdot 5^n-\frac{1}{3}\cdot 2^n$

4.71 解 $a_{n+3}-2a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n = n^2+2^n, \quad a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=1.$

答 $a_n = \frac{1}{3}+\frac{5}{6}n-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{6}n\cdot 2^n-\frac{2}{9}\cdot 2^n-\frac{1}{9}(-1)^n$

4.72 (a)藉著假設 $a_n = A+B_n$（A，B均爲未知常數），說明如何求出69題(a)的特解。(b)利用(a)之結果，再加上62題的方法，試說明如果求出69題(a)的答案。(c)如何修正(a)，(b)部份的方法，藉以求得69題(b)，70題(a)，70題(b)及71題的解。

4.73 求所有的連續函數 $F(t)$，使其滿足 $\int_0^t u\,F(u)\cos(t-u)\,du = te^{-t}-\sin t.$

答 $F(t) = -2e^{-t}$

4.74 證明非線性微分方程式

$$Y''(t)+2Y'(t) = Y^3(t), \qquad Y(0)=0,\ Y(1)=0$$

可改寫積分方程式如下：

$$Y(t) = \int_0^t (2t-2)\,Y(u)\,du + \int_t^1 2t\,Y(u)\,du + \int_0^1 K(t,u)\,Y^3(u)\,du$$

即 $$Y(t) = \int_0^t (2-2t)e^{2(u-t)}\,Y(u)\,du - \int_t^1 2te^{2(u-t)}\,Y(u)\,du + \int_0^1 e^{-2t}K(t,u)\,Y^3(u)\,du$$

其中 $K(t,u) = \begin{cases} u(t-1) & u<t \\ t(u-1) & u>t \end{cases}$.

4.75 試求 $Y(t)$: $8Y(t)-12Y(t-1)+4Y(t-2) = F(t)$ 其中當 $t<0$ 時，$Y(t)=0$，且

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-t} & t>0 \end{cases}$$

答 $Y(t) = \frac{1}{8}e^{-t}\left\{1+\sum_{n=0}^{[t]}(2-2^{-n})e^{n}\right\}$

4.76 若

$$Y_n'(t) = \beta\{Y_{n-1}(t)-Y_n(t)\} \qquad n=1,2,3,\ldots$$
$$Y_0'(t) = -\beta\,Y_0(t)$$

其中當 $n=1,2,3\cdots$ 時，$Y_n(0)=1$，且 $Y_0(0)=1$，β 爲一常數，試求 $Y_n(t)$。

答 $Y_n(t) = \dfrac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!}$

4.77 若 76 題之第一條等式改爲下式，試重做之。

$$Y_n'(t) = \beta_n\{Y_{n-1}(t) - Y_n(t)\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

其中 β_1，β_2，β_3，…均爲常數。

4.78 直接證明擺線的等時性質（Tautochrone property）。

4.79 捷線問題（Brachistochrone problem）乃是在求一落於垂直平面之無摩擦鐵線的形狀（如圖 4-1 所示），而此形狀必須使玻璃珠在最短時間內能由 P 滑至 O。此問題之解答爲擺線（如圖 4-2 所示）。在以下之特例中，驗證此性質(a)一直線及(b)一拋物線連接 P 及 Q。

4.80 試求一落於垂直平面之無摩擦鐵線之形狀，此形狀必須使得玻璃珠由 P 點滑至最低點的時間，正比於 P 點相對於最低點之座標的垂直分量。

答 $x = a(1 - \cos^3\theta), \quad y = \frac{3}{2}a\sin^2\theta$

第五章

複變理論

5-1 複數係

因爲沒有實數 x 可以滿足方程式 $x^2+1=0$（或其他類似的方程式），所以要引進複數的觀念。

複數的型式爲 $a+b_i$，其中 a，b 均爲實數，分別稱爲**實部**（Real part）及**虛部**（Imaginary part），且 $i=\sqrt{-1}$ 稱爲**虛數單位**（Imaginary unit）。兩個複數 $a+b_i$ 及 $c+d_i$ 爲相等（Equal）若且唯若 $a=c$ 且 $b=d$。我們可將實數視爲當 $b=0$ 時，所有複數所成的集合。複數 $0+0_i$ 即對應於實數 0 。

$a+b_i$ 的**絕對值**（Absolute value）或**模數**（Modulus）定義爲 $|a+b_i|=\sqrt{a^2+b^2}$。$a+b_i$ 的**共軛複數**（Complex conjugate）定義爲 $a-b_i$。複數 Z 的共軛複數通常寫爲 $\bar{Z}$ 或 Z^*。

在進行複數的各項運算時，可說和實數的代數相同，只不過在 i^2 出現時，我們就以 -1 代之。但我們並未定義複數的不等關係。

就複數的公理基礎（Axiomatic foundation）方面來看，可將複數視爲實數 a，b 的有序對（a，b），且此有序對的運算規則和上一段所提到的複數運算是等價的。例如，我們定理 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$，$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$，$m(a,b)=(ma,mb)$ 等等。由此可將 $a+b_i$ 表示爲 $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$，其中 i 則代表 $(0,1)$。

5-2 複數的極式

若在相互垂直的兩軸 $X'OX$ 及 $Y'OY$（x 及 y 軸）選取實數刻度，則我們可由有序對（x，y）（稱爲此點的直角座標，Rectangular coordinates）來決定平面上任一點。參見圖 5-1 中，P，Q，R，S 及 T 各點的座標及位置。

由於複數 $x+iy$ 可視爲有序對（x，y），所以我們可在 xy 平面稱**複數平面**（Complex plane）或**阿千圖形**（Argand diagram）找到對應於複數的一點。參見圖 5-2，可知

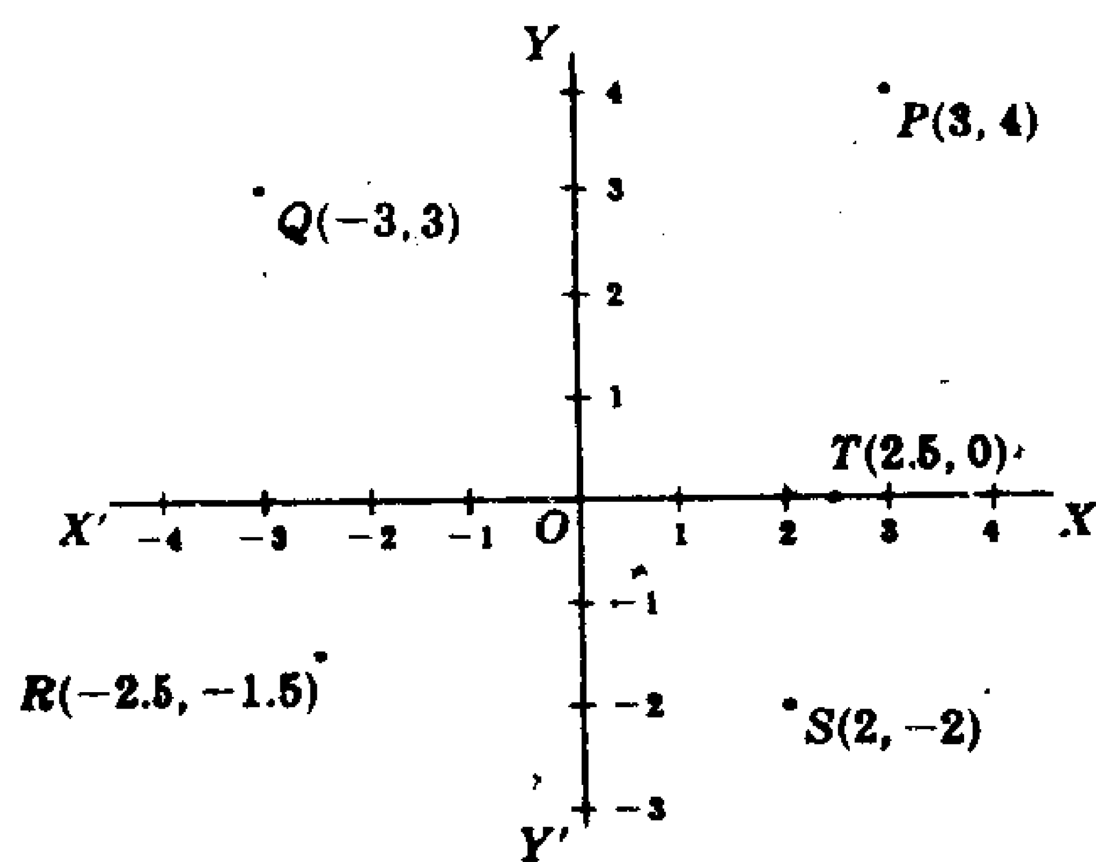


圖 5-1

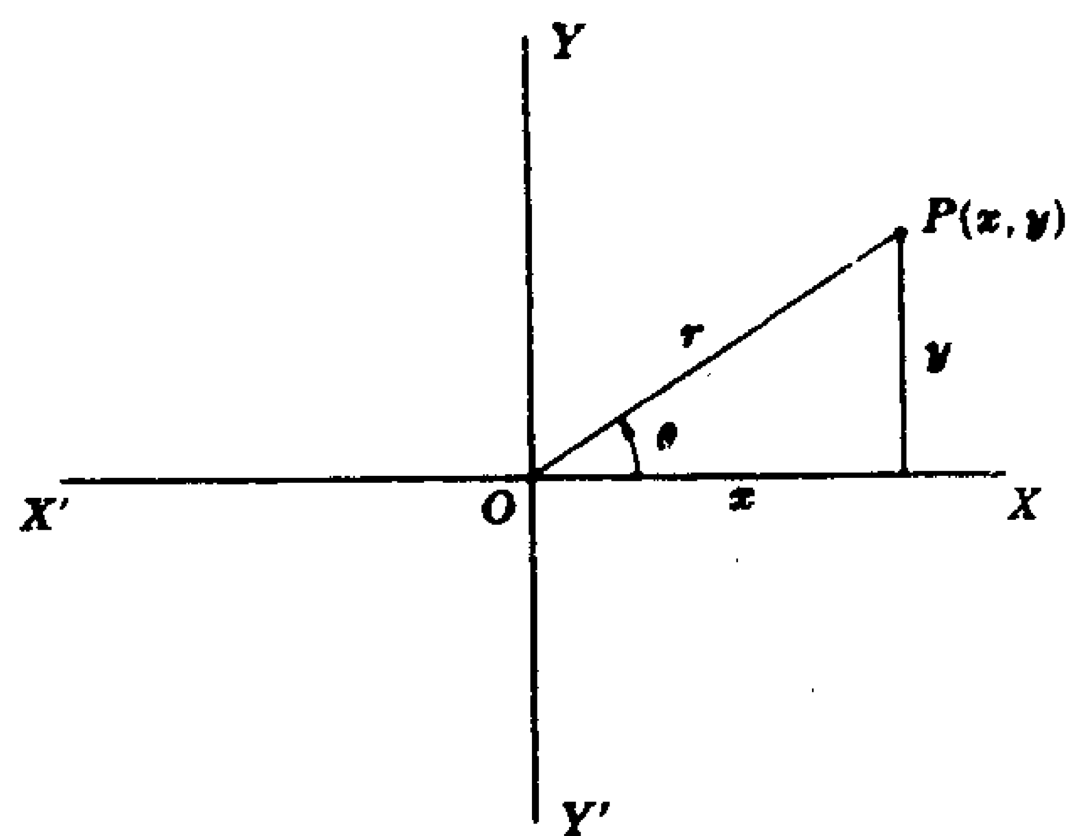


圖 5-2

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$，而 θ 稱爲**輻角**（Amplitude or argument）乃是 OP 與正 x 軸 OX 所夾之角。故

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2}$$

稱爲複數的**極式**（Polar form），其中 r，θ 稱爲**極座標**（Polar coordinates）。爲了方便起見，有時以 cis θ 代替 $\cos\theta + i\sin\theta$。

5-3 極式的運算，棣馬弗定理

若 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 且 $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，則我們可證明下列各式：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\} \tag{4}$$

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{5}$$

其中 n 爲任意實數。(5) 式通常稱爲**棣馬弗定理**（De Moivre's theorem）。

由**奧衣勒公式**（Euler's formula）

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

我們可將(3)，(4)及(5)寫成更具啓發性的形式

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \tag{6}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{7}$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \tag{8}$$

5-4 複數的根

若 n 爲正整數，則由棣馬弗定理可得

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

或寫成

$$z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = \{re^{i(\theta+2k\pi)}\}^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n} \tag{10}$$

由上可知 $z^{1/n}$（$z \neq 0$）有 n 個不同值。以上結論可輕易地推廣至 $z^{m/n}$。

5-5 函　數

若對一複數集合中的任一元素 z 而言，對應有單值或多值的複數 w，則 w 稱爲複數 z 的函數（Function of the complex variable z），寫成 $w = f(z)$。

若對每一 z 值而言，只有單一之 w 值與之對應，則此函數爲**單值**（Single-valued），否則就是**多重值**（Multiple-valued）或**多值**（Many-valued）。一般而言，我們可寫成 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，其中 u，v 均爲 x，y 的實變函數。

例題5.1

$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$，故 $u(x, y) = x^2 - y^2$，$v(x, y) = 2xy$；分別稱爲 $w = z^2$ 的**實部**（Real part）和**虛部**（Imaginary part）。

除非另有說明，否則我們均假定 $f(z)$ 爲單值。多重值的函數可視爲多個單值函數的集合。

5-6 極限及連續性

複數的極限及連續性的定義，都和實數類似。故若給定任意 $\epsilon > 0$，則存在一 $\delta > 0$，使得當 $0 < |z - z_0| < \delta$ 時，必有 $|f(z) - l| < \epsilon$，此即爲"當 z 逼近於 z_0 時，$f(z)$ 之極限値爲 l"。

同理，給定任意 $\epsilon > 0$，則存在一 $\delta > 0$，使得當 $|z - z_0| < \delta$ 時，必有 $|f(z)$

$-f(z_0)| < \epsilon$，此即爲“$f(z)$在z_0連續”。另一方面來說，若$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z)$，則$f(z)$即在$z_0$連續。

5·7 導 式

若$f(z)$在z平面上的某些區域爲單值，則$f(z)$的**導式**(Derivative)，記爲$f'(z)$，其定義爲

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (11)$$

但須假定極限的存在和$\Delta z \to 0$的方式無關。若在$z = z_0$時，(11)式之極限值存在，則稱$f(z)$**在z_0為可微**(Differentiable at z_0)。若對所有滿足$|z - z_0| < \delta$ ($\delta > 0$)的z而言，(11)式的極限值均存在，則稱$f(z)$**在z_0為可解析**(Analytic at z_0)。若對區域R中的所有z而言，極限值均存在，則稱$f(z)$**在$\mathcal{R}$為可解析**(Analytic in $\mathcal{R}$)。若$f(z)$爲可解析(Analytic)，則$f(z)$必爲單值且連續，但反之則不一定爲眞。

複數的基本函數，乃是由相對應的實數基本函數所延伸而得。若實變函數$f(x)$的級數展開存在，我們即可將級數中的x以z代之，並將此等式視爲定義用之。

例題5.2

定義 $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$, $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$，由此我們可證明 $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$，其他關係式亦可由此導出。

例題5.3

我們將a^b定義爲$e^{b \ln a}$，其中a，b可爲複數。因$e^{2k\pi i} = 1$，故$e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$且我們定義$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$，由此可知$\ln z$爲多值函數。此值函數乃是由不同的單值函數所構成，這些單值函數均稱爲原函數的**分枝**(Branch)。

複數函數的微分規則和實數是完全相同的，例 $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$, $\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$, 等等。

5·8 柯西一里曼方程式

函數$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$\mathcal{R}$內爲可解析的必要條件爲u，v均需滿足下列之**柯西－里曼方程式**（Cauchy-Riemann equations）：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{12}$$

（參見第12題）。若(12)式之偏微分在$\mathcal{R}$中連續，則此方程式即爲$f(z)$在$\mathcal{R}$內爲可解析的充分條件。

若u，v對x，y的二次導式均存在且連續，則將(12)式微分後可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{13}$$

故實部及虛部均滿足二維的**拉卜拉士方程式**（Laplace's equatión）。滿足拉卜拉士方程式的函數，我們稱爲**諧和函數**（Harmonic functions）。

5·9 線積分

令C爲xy平面上，連接(x_1,y_1)及(x_2,y_2)的曲線，以下積分式

$$\int_C P\,dx+Q\,dy \quad 或 \quad \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx+Q\,dy$$

（其中P，Q均爲x，y的函數）稱爲沿曲線C的**線積分**（Line integral）。這是在基本微積分中，對積分的推廣。就如同在基本微積分中，線積分也可定義爲和的極限。

線積分的重要性質爲

1. $$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx+Q\,dy=-\int_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)} P\,dx+Q\,dy$$

2. 若(x_3,y_3)在曲線C上之任意第三點，則

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_3,y_3)} P\,dx+Q\,dy+\int_{(x_3,y_3)}^{(x_2,y_2)} P\,dx+Q\,dy$$

若C爲**簡單封閉曲線**（Simple closed curve）（即不和本身交叉的曲線），如圖5-3所示，則繞著（反時鐘方向，即正方向）曲線C的積分式寫爲

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

線積分的計算，參見第 15 題。

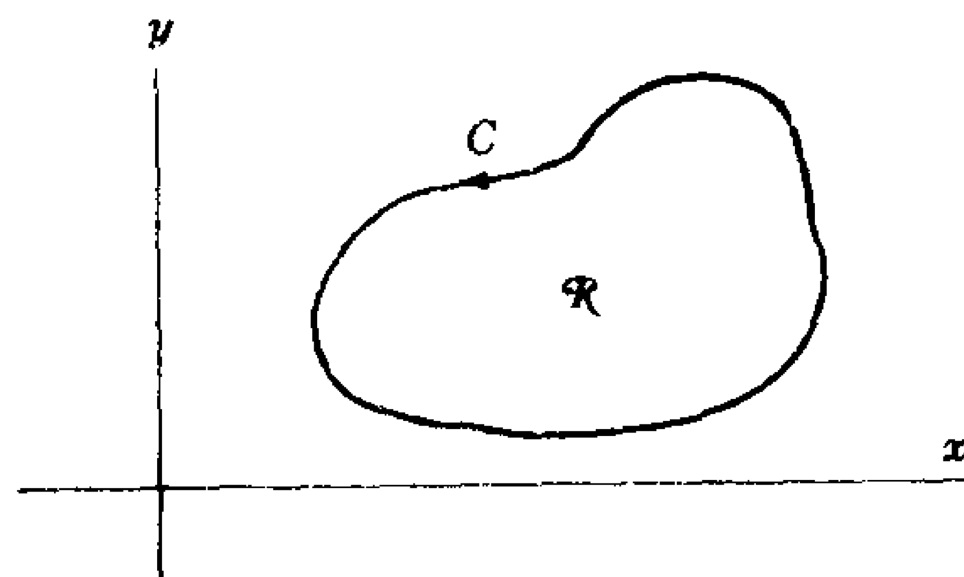


圖 5-3

5·10 平面上的革忍定理

C 爲簡單封閉曲線，所包住的區域爲 $\mathcal{R}$（見圖 5-3）。假設在 $\mathcal{R}$ 和 C 上，P，Q 及其對 x，y 的一次偏微分均連續，則

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

上式通常稱爲平面上的**革忍定理**（Green's theorem in the plane）。

5·11 積 分

若 $f(z)$ 在區域 $\mathcal{R}$ 中爲完全定義、單值及連續，我們定義 $f(z)$ 沿 $\mathcal{R}$ 中之某路徑 C，自 z_1 至 z_2（其中 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$）之積分（Integral）爲

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} u\,dx - v\,dy + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} v\,dx + u\,dy$$

由此定義可看出，複變函數的積分是隨線積分而定的。另一定義乃利用實變函數，再取和的極限，其最後結果和上式是等價的。

複數的積分規則和實數相同，一重要結果爲

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq \int_C |f(z)|\,|dz| \leqq M\int_C ds = ML \qquad (14)$$

其中 M 爲 $|f(z)|$ 在 C 中的上界，即 $|f(z)| \leq M$，而 L 爲路徑 C 的長度。

5·12 柯西定理

C 爲簡單封閉曲線，若 $f(z)$ 在 C 上及其所包圍之區域內均爲可解析，則我們有**柯西定理**（Canchy's theorem）如下：

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{15}$$

可參見第 19 題。

以另一方式表之，(15)式和下列敍述是等價的，即 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ 之值和連接 z_1，z_2之路徑無關。因此此類積分可由 $F(z_2)-F(z_1)$ 計算得之，其中 $F'(z)=f(z)$。

例題5.4

因 $f(z)=2z$ 在任何點均爲可解析，故對任意簡單封閉曲線 C 有

$$\oint_C 2z\,dz = 0$$

又

$$\int_{2i}^{1+i} 2z\,dz = z^2\Big|_{2i}^{1+i} = (1+i)^2-(2i)^2 = 2i+4$$

5·13 柯西積分公式

若 $f(z)$ 在簡單封閉曲線 C 上及其內之區域均爲可解析，而 a 爲 C 內任意一點，則

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{16}$$

其中積分方向爲沿 C 的正（即反時鐘）方向。

而 $f(z)$ 在 $z=a$ 的 n 次導式爲

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \tag{17}$$

這些均稱爲**柯西積分公式**（Cauchy's integral formula）。這些公式非常出色，因它表示：若 $f(z)$ 在 C 上之值已知，則 $f(z)$ 及其導式在 C 內之值均可計算出。同理它也指出，若一複變函數之一次導式存在，則其任意高次導式均存在。這在實變函數中就不一定成立。

5·14 泰勒級數

令 $f(z)$ 在以 $z=a$ 爲圓心的圓上及圓內均爲可解析，則對圓內的所有點 z，我們可將 $f(z)$ 表爲**泰勒級數**（Taylor's series）如下：

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots \tag{18}$$

參見第 29 題。

5・15 奇 點

若 $f(z)$ 在某一點 z 爲不可解析，則此點稱爲**奇點**（Singular point）。若 $f(z)$ 在某區域，除了內部一點 $z = a$ 外，其餘均爲可解析，則我們稱 $z = a$ 爲 $f(z)$ 的**孤立奇點**（Isolated singularity）。

例題 5.5

若 $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$，則 $z = 3$ 爲 $f(z)$ 的孤立奇點。

5・16 極 點

若 $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^n}$，$\phi(a) \neq 0$，其中 $\phi(z)$ 在任意點（含 $z = a$）均爲可解析，且 n 爲正整數，則 $f(z)$ 的孤立奇點爲 $z = a$，或稱爲 **n 階級點**（Pole of order n）。若 $n = 1$，則稱**單極點**（Simple pole）；若 $n = 2$，則稱**雙重極點**（Double pole），以下類推。

例題 5.6

$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$ 有兩個奇點，一 2 階極點或雙重極點在 $z = 3$，另一 1 階極點或單極點在 $z = -1$。

例題 5.7

$f(z) = \frac{3z-1}{z^2+4} = \frac{3z-1}{(z+2i)(z-2i)}$ 有兩個單極點在 $z = \pm 2i$。

除了極點之外，函數還具有其他形式的奇點。例如，$f(z) = \sqrt{z}$ 在 $z = 0$ 處爲**分枝點**（Branch point）（見 45 題）。函數 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 有一奇點在 $z = 0$，然而，因爲 $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$ 並非無限大，我們稱此奇點爲**可去奇點**（Removable singularity）。

5·17 洛冉級數

若 $f(z)$ 在 $z=a$ 有一 n 階極點，但在以 $z=a$ 爲圓心的圓 C 內均爲可解析，則 $(z-a)^n f(z)$ 在圓 C 上及其內部任一點均爲可解析，且在 $z=a$ 具有泰勒級數，故

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \quad (19)$$

此稱爲 $f(z)$ 的**洛冉級數**（Laurent's series）。其中 $a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots$ 稱爲**解析部分**（Analytic part），而其他包含 $z-a$ 之負次項，稱爲**主要部分**（Principal part）。一般而言，若級數 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$ 爲洛冉級數，其中 $k<0$ 的項構成主要部份。若一函數在兩同心圓（圓心爲 $z=a$）之間爲可解析，則此函數即可展開成洛冉級數（參見 119 題）。

由函數 $f(z)$ 展開之洛冉級數，可定義出此函數之不同型態之奇點。例如當某個洛冉級數之主要部分爲有限項，亦即 $a_{-n}\neq 0$，但 a_{-n-1}，a_{-n-2} 均爲零，則 $z=a$ 爲 n 階極點。若主要部份具有無限多的非零項，則 $z=a$ 稱爲**本性奇點**（Essential singularity）或**無限階極點**（Pole of infinite order）。

例題5.8

函數 $e^{1/z} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots$ 在 $z=0$ 爲本性奇點。

5·18 留 數

(19) 式中的各項係數可由 $(z-a)^n f(z)$ 的泰勒級數求得。在更進一步的探討，可知 a_{-1}（稱爲 $f(z)$ 在極點 $z=a$ 的**留數**，Residue）此係數非常重要，它可由下列公式求得

$$a_{-1} = \lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\} \quad (20)$$

其中 n 是極點的階數。若 $z=a$ 爲單極點，則留數的計算即非常容易，如下

$$a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) \quad (21)$$

5-19 留數定理

設 $f(z)$ 在區域 $\mathcal{R}$ 中，除了有一 n 階極點在 $z=a$ 之外，其餘各點均爲可解析。若 C 爲包含 $z=a$ 的任意簡單封閉曲線，則 $f(z)$ 可展開(19)式的型式。將(19)式積分，並代入下列恒等式

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{if } n = 1 \end{cases} \tag{22}$$

（參見 21 題），則得

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1} \tag{23}$$

故 $f(z)$ 繞一包含簡單極點的封閉曲線積分後，其值等於 $2\pi i$ 乘上極點的留數。

更廣泛地說，我們有下列重要定理

定理 5.1：若 $f(z)$ 在區域 $\mathcal{R}$ 中，除了具有有限個極點 $z=a$，b，c，… 之外，其餘各點（含邊界 C）均爲解析。假設對應於極點 $z=a$，b，c … 之留數爲 a_{-1}，b_{-1}，c_{-1}，則

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\cdots) \tag{24}$$

即 $f(z)$ 之積分值，等於包含於 C 內各極點的留數和，再乘上 $2\pi i$。柯西定理及積分公式爲此結論之特例。此定理稱爲**留數定理**（Residue theorem）。

5-20 定積分的計算

利用留數定理，以及適當的函數 $f(z)$ 和路徑 C（此函數和路徑的選取，須要較深入的技巧），即可求出定積分的値。下列幾種型式是一般常遇到的：

1. $\int_0^\infty F(x)\,dx$，其中 $F(x)$ 爲偶函數。

   考慮沿路徑 C 的線積分 $\oint_C F(z)\,dz$，其中路徑 C 包含自 $x=-R$ 至 $x=R$ 之直線，及半徑爲 R 之半圓（在 x 軸上方），然後再令 $R\to\infty$。見 37 及 38 題。

2. $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$，$G$ 爲 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 的有理函數。

令 $z = e^{i\theta}$，則 $\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$，$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$，且 $dz = ie^{i\theta}d\theta$ 即 $d\theta = dz/iz$

，故原式即等於 $\oint_C F(z)\,dz$，其中 C 爲以原點爲圓心的單位圓，見 39、40 題。

3. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{Bmatrix}dx$，其中 $F(x)$ 爲有理函數。

考慮 $\oint_C F(z)\,e^{imz}\,dz$，其中路徑 C 和第 1 類相同。見 42 題。

4. 其他各類須用到特殊路徑的問題，見 43，46 題。

附解題

複 數

5.1 執行下列運算

答 (*a*) $(4-2i)+(-6+5i) = 4-2i-6+5i = 4-6+(-2+5)i = -2+3i$

(*b*) $(-7+3i)-(2-4i) = -7+3i-2+4i = -9+7i$

(*c*) $(3-2i)(1+3i) = 3(1+3i)-2i(1+3i) = 3+9i-2i-6i^2 = 3+9i-2i+6 = 9+7i$

(*d*) $$\frac{-5+5i}{4-3i} = \frac{-5+5i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2} = \frac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}$$
$$= \frac{-35+5i}{25} = \frac{5(-7+i)}{25} = \frac{-7}{5}+\frac{1}{5}i$$

(*e*) $$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} = \frac{i-1+(i^2)(i)+(i^2)^2+(i^2)^2 i}{1+i} = \frac{i-1-i+1+i}{1+i}$$
$$= \frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{i-i^2}{1-i^2} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

(*f*) $|3-4i|\,|4+3i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2}\,\sqrt{(4)^2+(3)^2} = (5)(5) = 25$

(*g*) $$\left|\frac{1}{1+3i}-\frac{1}{1-3i}\right| = \left|\frac{1-3i}{1-9i^2}-\frac{1+3i}{1-9i^2}\right| = \left|\frac{-6i}{10}\right| = \sqrt{(0)^2+(-\tfrac{6}{10})^2} = \frac{3}{5}$$

5.2 若 z_1，z_2 爲兩複數，證明 $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

答 令 $z_1 = x_1+iy_1,\ z_2 = x_2+iy_2$ 則

$$\begin{aligned}|z_1z_2| &= |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)|\\ &= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}\\ &= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2} = |x_1+iy_1|\,|x_2+iy_2| = |z_1|\,|z_2|\end{aligned}$$

5.3 解 $z^3-2z-4=0$.

圈 可能之有理根爲 ±1，±2，±4，代入後，可知 $z=2$ 爲原式之一根，故原式可寫成 $(z-2)(z^2+2z+2)=0$. 。二次方程式（Quadratic equation）$az^2+bz+c=0$ 之根爲 $z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，在此 $a=1$，$b=2$，$c=2$，故

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i.$$

故原式之解爲 $2, -1+i, -1-i$.

複數之極式

5.4 將下列表爲極式 (a) $3+3i$, (b) $-1+\sqrt{3}i$, (c) -1, (d) $-2-2\sqrt{3}i$. [見圖 5-4]。

圈 (a) 輻角 $\theta=45°=\pi/4$ 弳度，模數 $r=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，故

$$3+3i=r(\cos\theta+i\sin\theta)=3\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)=3\sqrt{2}\,\text{cis}\,\pi/4=3\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}$$

(b) 輻角 $\theta=120°=2\pi/3$ 弳度，模數 $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2.$，故

$$-1+\sqrt{3}i=2(\cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3)=2\,\text{cis}\,2\pi/3=2e^{2\pi i/3}$$

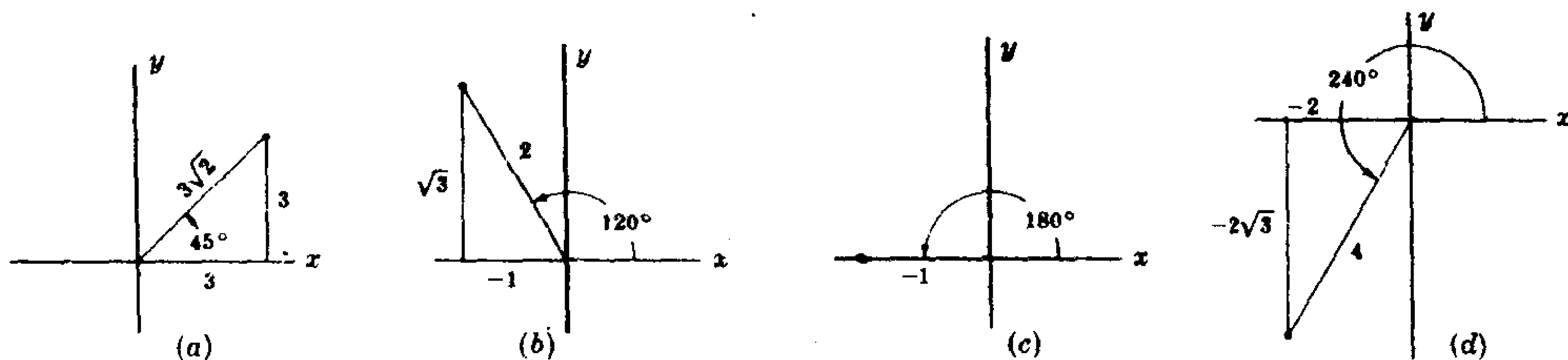


圖 5-4

(c) 輻角 $\theta=180°=\pi$ 弳度，模數 $r=\sqrt{(-1)^2+(0)^2}=1.$，故

$$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)=\text{cis}\,\pi=e^{\pi i}$$

(d) 輻角 $\theta=240°=4\pi/3$ 弳度，模數 $r=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4.$，故

$$-2-2\sqrt{3}=4(\cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3)=4\,\text{cis}\,4\pi/3=4e^{4\pi i/3}$$

5.5 計算 (a) $(-1+\sqrt{3}i)^{10}$, (b) $(-1+i)^{1/3}$.

圈 (a) 由第 4 題(b)及棣馬弗定理，得

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}i)^{10}&=[2(\cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3)]^{10}=2^{10}(\cos 20\pi/3+i\sin 20\pi/3)\\&=1024[\cos(2\pi/3+6\pi)+i\sin(2\pi/3+6\pi)]=1024(\cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3)\\&=1024(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)=-512+512\sqrt{3}i\end{aligned}$$

(b) $-1+i = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = \sqrt{2}[\cos(135^\circ + k\cdot 360^\circ) + i\sin(135^\circ + k\cdot 360^\circ)]$
故

$$(-1+i)^{1/3} = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{135^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right)\right]$$

當 $k=0,1,2$ 時，上式爲

$\sqrt[6]{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$,

$\sqrt[6]{2}(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)$,

$\sqrt[6]{2}(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ)$

當 $k=3,4,5,6,7\cdots$ 時，所得答案和以上三式是重覆的。這些複數3次方根在複數平面上，是以 P_1，P_2，P_3 表之，參見圖5-5。

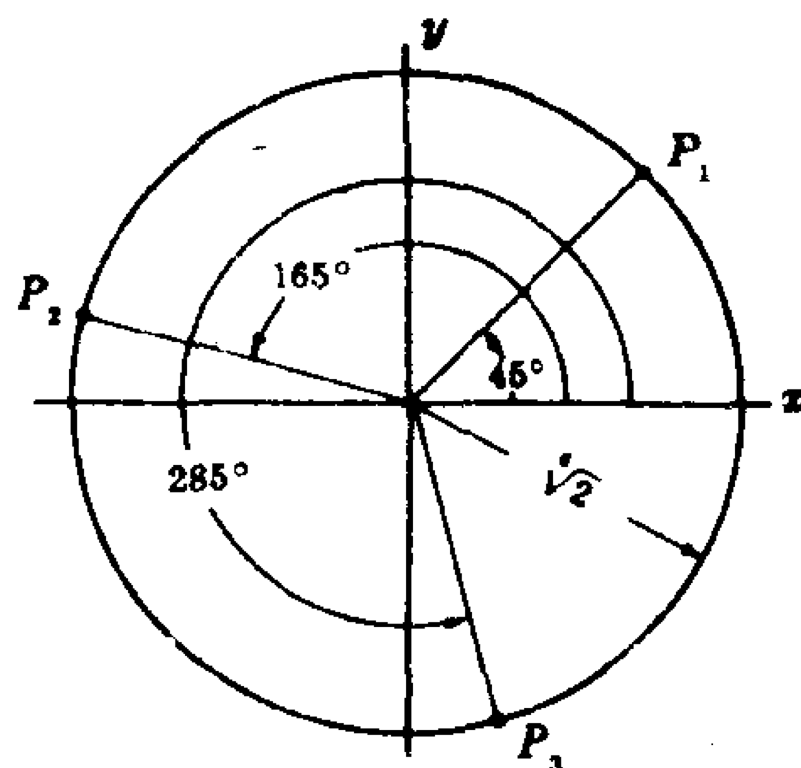


圖5-5

5.6 決定下列方程式所形成的軌跡。

(a) $|z-2|=3$, (b) $|z-2|=|z+4|$, (c) $|z-3|+|z+3|=10$.

答 (a) **解1**：$|z-2|=|x+iy-2|=|x-2+iy|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=3$ 即 $(x-2)^2+y^2=9$,
故爲半徑等於3，圓心（2，0）的一圓。

解2：$|z-2|$ 爲兩複數 $z=x+iy$ 及 $2+0i$ 之距離，若此距離保持爲3，則其軌跡即是以 $2+0i$ 或（2，0）爲圓心，半徑等於3的一圓。

(b) **解1**：$|x+iy-2|=|x+iy+4|$ 即 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$，平方之，得 $x=-1$，故爲一直線。

解2：所求軌跡上任一點至（2，0）及（-4，0）等距，故軌跡爲連接（2，0）及（-4，0）之線段的中垂線，即 $x=-1$。

(c) **解1**：軌跡爲 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$ 即 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}$.、平方並化簡之，得 $25+3x=5\sqrt{(x+3)^2+y^2}$.，再平方化簡之，得 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，故爲一橢圓，其長軸及短軸長各爲5，4。

解2：所求軌跡上任一點至（3，0）及（-3，0）之距離和爲10，故軌跡爲以（-3，0）及（3，0）爲焦點之橢圓，且長軸長爲5。

5.7 決定下列方程式在 z 平面的區域：

(a) $|z|<1$.

答 單位圓之內部，見圖5-6(a)。

(b) $1<|z+2i|\leq 2$.

解 $|z+2i|$ 爲 z 至 $-2i$ 的距離，故 $|z+2i|=1$ 爲圓心在（0，−2）或 $-2i$，半徑爲 1 的圓，而 $|z+2i|=2$ 爲半徑等於 2，圓心在 $-2i$ 的圓。故 $1<|z+2i|\leq 2$ 表示在 $|z+2i|=1$ 之外，且在 $|z+2i|=2$ 之內（包含 $|z+2i|=2$）的區域。見圖 5-6 (b)。

(c) $\pi/3 \leq \arg z \leq \pi/2$.

解 在這裏 $\arg z=\theta$，且 $z=re^{i\theta}$。此範圍爲由 $\theta=\pi/3$ 及 $\theta=\pi/2$ 兩直線所圍成之無限區域，且包含這兩條直線，見圖 5-6 (c)。

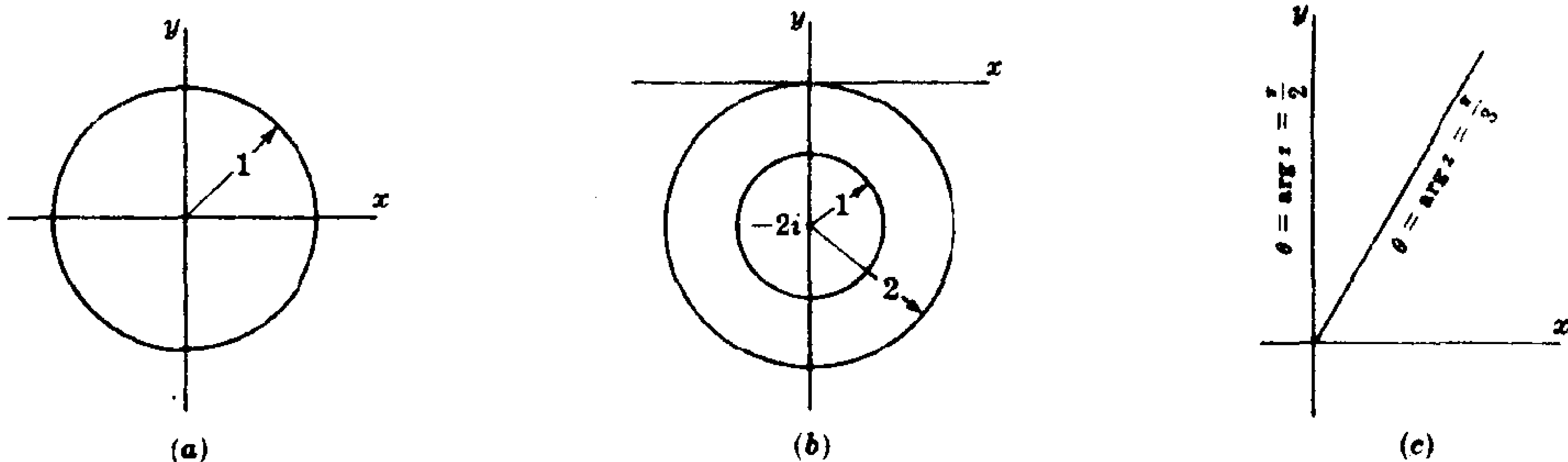


圖 5-6

5.8 將下列表爲 $u(x,y)+iv(x,y)$ 之型式，其中 u 及 v 爲實數：

(a) z^3, (b) $1/(1-z)$, (c) e^{3z}, (d) $\ln z$.

解

(a) $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

故 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3.$

(b) $w = \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{1-(x+iy)} = \dfrac{1}{1-x-iy}\cdot\dfrac{1-x+iy}{1-x+iy} = \dfrac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$

故 $u(x,y) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}, \quad v(x,y) = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}.$

(c) $e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i\sin 3y)$ 故 $u = e^{3x}\cos 3y,\ v = e^{3x}\sin 3y$

(d) $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\tan^{-1} y/x$ 故

$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \quad v = \tan^{-1} y/x$

$\ln z$ 爲多值函數（在此題中它有無限多個值），因爲 θ 可任意加上 2π 的整數倍。對數之主值（Principal value）定義爲在 $0\leq\theta<2\pi$ 所得之值，此稱爲 $\ln z$ 的主分枝（Principal branch）。

5.9 證明 (a) $\sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

(b) $\cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.$

答 利用關係式 $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$，得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

故
$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\} \\ &= (\sin x)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i(\cos x)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y\end{aligned}$$

同理，
$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\{e^{ix-y} + e^{-ix+y}\} = \tfrac{1}{2}\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\} \\ &= (\cos x)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) - i(\sin x)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\end{aligned}$$

導式及柯西－里曼方程式

5.10 證明 $\frac{d}{dz}\bar{z}$ 在任何地方均不存在（ $\bar{z}$ 爲 z 的共軛複數）。

答 由定義，$\frac{d}{dz}f(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ ，若此極限存在，且和 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ 逼近零的方式無關，則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\bar{z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\overline{x+iy+\Delta x+i\Delta y} - \overline{x+iy}}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}$$

若 $\Delta y = 0$ ，則所求爲 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

若 $\Delta x = 0$ ，則所求爲 $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$

由以上得知，此極限值和 $\Delta z\to 0$ 的方式有關，故 $\bar{z}$ 的導式不存在，亦即 $\bar{z}$ 在任意點均不可解析（Non-analytic）。

5.11 (a) 若 $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ，求 $\frac{dw}{dz}$ ，(b)決定在何處 w 爲不可解析。

答 (a) **解1**：

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)} - \dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$= \dfrac{2}{(1-z)^2}$ 只要 $z \neq 1$，則此答案和 $\Delta z \to 0$ 的方式無關。

解 2：若 $z \neq 1$，則可應用一般微分規則，故在此利用兩式相除的微分規則得，

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1-z)\dfrac{d}{dz}(1+z) - (1+z)\dfrac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

(b) 此函數除了在 $z = 1$ 之外，其餘均爲可解析，因在 $z = 1$ 時導式不存在。故此函數在 $z = 1$ 不可解析。

5.12 證明 $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ 在某區域爲可解析之必要條件爲 u，v 在此區域中須滿足柯西 - 里曼方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

答 因 $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, 且

$$f(z+\Delta z) = f[x+\Delta x + i(y+\Delta y)] = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

故

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i\{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

若 $\Delta y = 0$，則所求極限爲

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} + i\left\{\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

若 $\Delta x = 0$，則所求極限爲

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + \left\{\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\right\} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

若導式存在，則在此特殊情況下所求的極限值應相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

故得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 與 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

反之，我們可證明：若在某區域中，u 及 v 對 x 及 y 的一次偏導式均連續，則柯西-里曼方程式即為 $f(z)$ 在此區域為解析的充分條件。

5.13 (a)若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在區域 $\mathcal{R}$ 為解析，證明曲線族 $u(x,y)=C_1$ 及 $v(x,y)=C_2$ 互相垂直。(b)若 $f(z)=Z^2$，試驗證之。

解 (a) 考慮兩曲線族的特例：$u(x,y)=u_0$ 及 $v(x,y)=v_0$ 相交於 (x_0,y_0)

但 $du = u_x dx + u_y dy = 0$，故 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y}$.

同理 $dv = v_x dx + v_y dy = 0$，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{v_x}{v_y}$.

上兩式即代表兩曲線在交點 (x_0,y_0) 的斜率。

由柯西-里曼方程式 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$，可得在交點 (x_0,y_0) 的斜率積為

$$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = -1$$

故兩組曲線族中任意（各別）兩條曲線為垂直，即此兩組曲線族互相垂直。

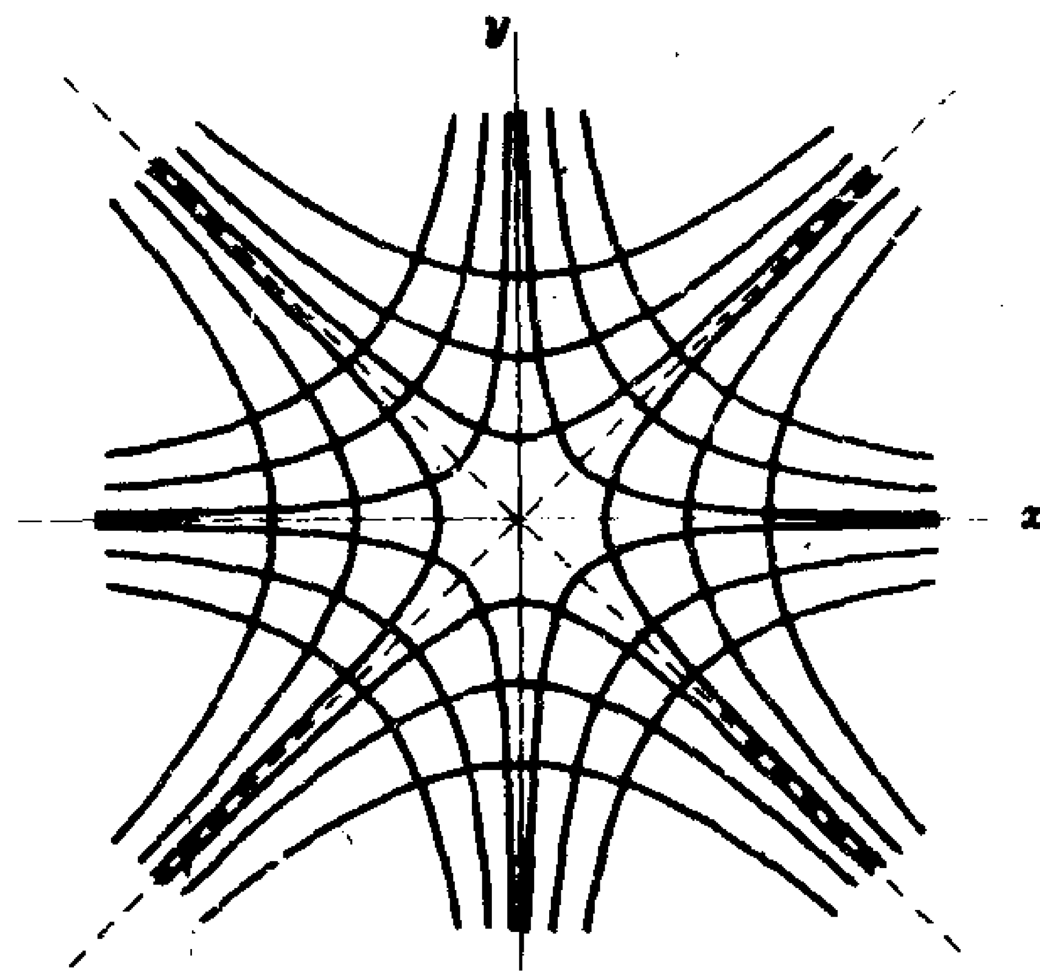


圖5-7

(b) 若 $f(z)=z^2$，則 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$，數個 $x^2-y^2=c_1$ 及 $2xy=c_2$ 之圖形參見圖5-7。

5.14 在空氣動力學及流體力學中，若 $f(z)$ 為解析且 $f(z)=\phi+i\psi$，則 ϕ，ψ 分別稱為**速度勢**（Velocity potential）及**流線函數**（Stream function）。若 $\phi = x^2+4x-y^2+2y$，(a)求 ψ，(b)求 $f(z)$。

解 (a) 由柯西-里曼方程式，$\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$，$\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$. 故

$$(1)\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2x+4 \qquad (2)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2y-2$$

解1：積分(1)式，$\psi = 2xy+4y+F(x)$.

積分(2)式，$\psi = 2xy-2x+G(y)$.

上兩式必須相等，故 $F(x) = -2x+c$，$G(y) = 4y+c$ 其中 c 為任意實常數，所

以 $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

解 2：

積分(1)式，$\psi = 2xy + 4y + F(x)$. 代入(2)式，$2y + F'(x) = 2y - 2$ 得 $F'(x) = -2$ 故 $F(x) = -2x + c$ 所以 $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

(b) 由(a)，

$$f(z) = \phi + i\psi = x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x + c)$$
$$= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 4(x + iy) - 2i(x + iy) + ic$$
$$= z^2 + 4z - 2iz + c_1$$

其中 c_1 爲純虛數之常數。

亦可由下法解之：因 $z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy$，故 $x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

代入 $\phi + i\phi$ 即可得 $f(z)$，其中含 $\bar{z}$ 之項將會抵消而不出現於 $f(z)$ 中。

線積分

5.15 計算 $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)\,dx + (y^2 + x)\,dy$ 積分路徑爲(a)由（0，1）至（1，2）的直線，(b)由（0，1）至（1，1），再由（1，1）至（1，2）的兩直線，(c)拋物線 $x = t$，$y = t^2 + 1$。

答 (a) 在 xy 平面上，連接（0，1）及（1，2）之直線爲 $y = x + 1$，故 $dy = dx$ 原式等於

$$\int_{x=0}^{1} \{x^2 - (x+1)\}\,dx + \{(x+1)^2 + x\}\,dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x)\,dx = 5/3$$

(b) 由（0，1）至（1，1）的直線上，$y = 1$，$dy = 0$，故線積分爲

$$\int_{x=0}^{1} (x^2 - 1)\,dx + (1 + x)(0) = \int_0^1 (x^2 - 1)\,dx = -2/3$$

由（1，1）至（1，2）的直線上，$x = 1$，$dx = 0$ 故線積分爲

$$\int_{y=1}^{2} (1 - y)(0) + (y^2 + 1)\,dy = \int_1^2 (y^2 + 1)\,dy = 10/3$$

故原式爲 $= -2/3 + 10/3 = 8/3$。

(c) $(x, y) = (0, 1)$ 時，$t = 0$，$(x, y) = (1, 2)$ 時，$t = 1$，故線積分爲

$$\int_{t=0}^{1} \{t^2 - (t^2 + 1)\}\,dt + \{(t^2 + 1)^2 + t\}\,2t\,dt = \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1)\,dt = 2$$

平面上的革忍定理

5.16 若C為簡單封閉曲線，且任何和x軸或y軸平行的直線，最多僅和C相交於兩點。試證明以C為積分路徑的革忍定理。

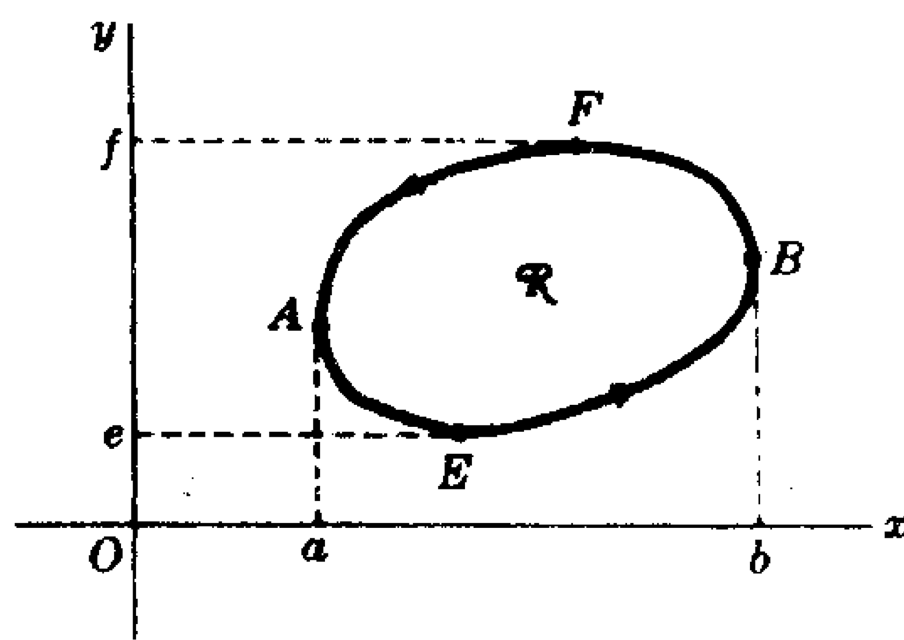


圖 5-8

解 令曲線AEB及AFB（見圖5-8）的方程式分別為$y = Y_1(x)$及$y = Y_2(x)$，若$\mathcal{R}$為由曲線C所包住的區域，

則
$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right]dx$$
$$= \int_{x=a}^{b} P(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\,dx = \int_a^b [P(x,Y_2) - P(x,Y_1)]\,dx$$
$$= -\int_a^b P(x,Y_1)\,dx - \int_b^a P(x,Y_2)\,dx = -\oint_C P\,dx$$

故
$$(1) \qquad \oint_C P\,dx = -\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

同理，令曲線EAF及EBF的方程式分別為$x = X_1(y)$及$x = X_2(y)$，則

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right]dy = \int_e^f [Q(X_2,y) - Q(X_1,y)]\,dy$$
$$= \int_f^e Q(X_1,y)\,dy + \int_e^f Q(X_2,y)\,dy = \oint_C Q\,dy$$

$$(2) \qquad \oint_C Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

將(1)及(2)相加 $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$

此結論可輕易推廣至其他簡單封閉曲線。

5.17 驗證平面上的革忍定理

$$\oint_C (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

其中C為由$y = x^2$及$x = y^2$包圍區域所形成的封閉曲線。

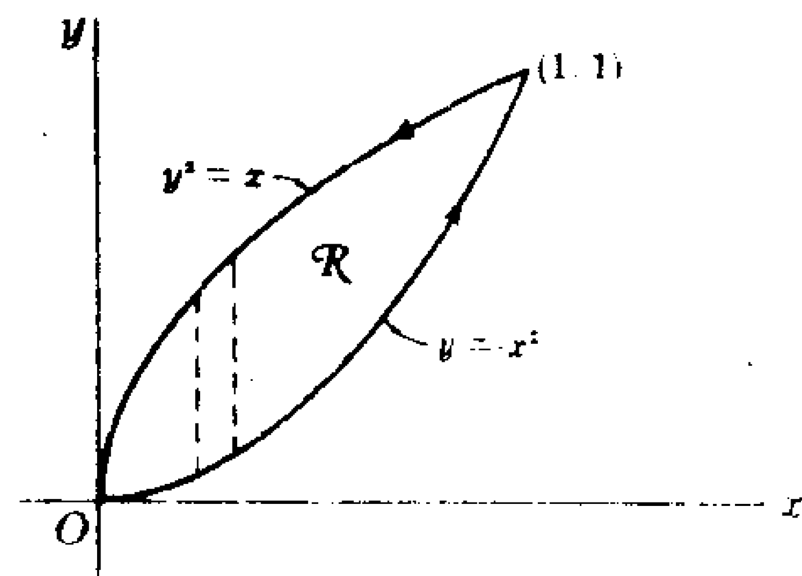


圖 5-9

解 平面曲線 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 相交於（0，0）及（1，1）。積分路徑 c 的正方向可見圖5-9。

若沿 $y=x^2$ 積分，則線積分等於

$$\int_{x=0}^{1} \{(2x)(x^2)-x^2\}\,dx + \{x+(x^2)^2\}\,d(x^2) = \int_0^1 (2x^3+x^2+2x^5)\,dx = 7/6$$

若沿 $y^2=x$ 積分，則線積分等於

$$\int_{y=1}^{0} \{2(y^2)(y)-(y^2)^2\}\,d(y^2) + \{y^2+y^2\}\,dy = \int_1^0 (4y^4-2y^5+2y^2)\,dy = -17/15$$

故所求之線積分爲 $=7/6-17/15=1/30$。

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy-x^2)\right\}dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (1-2x)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y-2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 (x^{1/2}-2x^{3/2}-x^2+2x^3)\,dx = 1/30$$

由此可知此例適用格林定理。

積分，柯西定理，柯西積分公式

5.18 計算 $\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz$

(a) 沿拋物線 $x=t$，$y=t^2$ 積分，其中 $1\le t\le 2$。

(b) 沿連接 $1+i$ 及 $2+4i$ 的直線積分。

(c) 沿 $1+i$ 至 $2+i$；然後再至 $2+4i$ 的兩直線積分。

解 $z=x+iy$ 代入

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x+iy)^2(dx+i\,dy) = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2+2ixy)(dx+i\,dy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$$

解1：

(a) 點（1，1）及（2，4）分別對應於 $t=1$ 及 $t=2$，故上式線積分變爲

$$\int_{t=1}^{2} \{(t^2-t^4)\,dt - 2(t)(t^2)2t\,dt\} + i\int_{t=1}^{2} \{2(t)(t^2)\,dt + (t^2-t^4)(2t)\,dt\} = -\frac{86}{3}-6i$$

(b) 連接（1，1）及（2，4）之直線方程式為 $y-1=\frac{4-1}{2-1}(x-1)$ 即 $y=3x-2$，故

$$\int_{x=1}^{2}\{[x^2-(3x-2)^2]\,dx - 2x(3x-2)3\,dx\} + i\int_{x=1}^{2}\{2x(3x-2)\,dx + [x^2-(3x-2)^2]3\,dx\} = -\frac{86}{3}-6i$$

(c) 由 $1+i$ 至 $2+i$ [或（1，1）至（2，1）]時，$y=1$，$dy=0$ 故

$$\int_{x=1}^{2}(x^2-1)\,dx + i\int_{x=1}^{2}2x\,dx = \frac{4}{3}+3i$$

由 $2+i$ 至 $2+4i$ [或（2，1）至（2，4）]時，$x=2$，$dx=0$ 故

$$\int_{y=1}^{4}-4y\,dy + i\int_{y=1}^{4}(4-y^2)\,dy = -30-9i$$

相加得

$$\left(\frac{4}{3}+3i\right)+(-30-9i) = -\frac{86}{3}-6i.$$

解 2：

因線積分和路徑無關（見第 19 題），故以上(a)(b)(c)所得答案均相同。在此情況下，可直接計算（將之視為實數）如下

$$\int_{1+i}^{2+4i}z^2\,dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3}-\frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{86}{3}-6i$$

5.19 (a) 證明柯西定理：若 $f(z)$ 在簡單封閉曲線 C 所包圍的區域內及此曲線上均為可解析，則 $\oint_C f(z)\,dz = 0.$

(b) 在以上的條件下，證明 $\int_{P_1}^{P_2} f(z)\,dz$ 之值和連接 P_1，P_2 之路徑無關。

答 (a) $\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$

由革忍定理，

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \iint_{\mathcal{R}}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy,\quad \oint_C v\,dx + u\,dy = \iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$$

其中$\mathcal{R}$爲由C所包圍的區域。

因$f(z)$爲解析，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$（見12題），故上式積分式爲零，即

$\oint_C f(z)\,dz = 0$，我們在此推導過程中，假設$f'(z)$爲連續（故偏導式亦連續），然而這項限制並非必要。

(b) 考慮連接P_1，P_2的兩條路徑（見圖5-10）。由柯西定理得

$$\int_{P_1AP_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz + \int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz = -\int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = \int_{P_1BP_2} f(z)\,dz$$

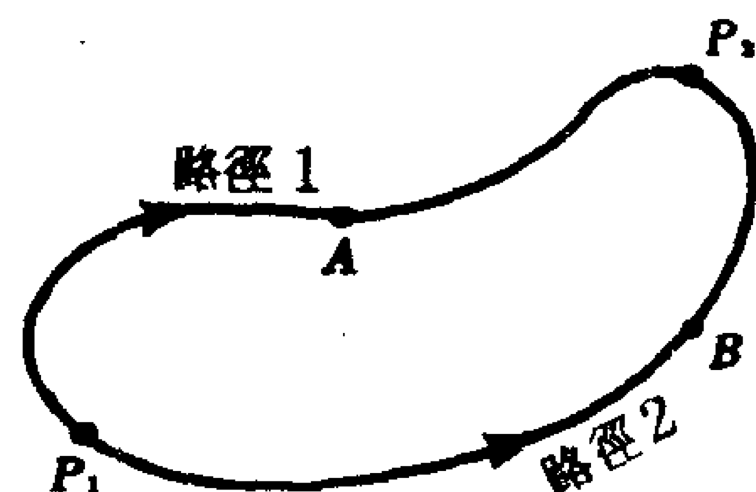


圖 5-10

即沿P_1AP_2（路徑1）之積分＝沿P_1BP_2（路徑2）之積分，故積分值和連接P_1，P_2之路徑無關。

以上推論解釋了18題的結果，因$f(z)=z^2$爲可解析的。

5.20 若$f(z)$在封閉曲線C_1，C_2，及其所包圍的區域內，均爲可解析（見圖5-11），證明

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

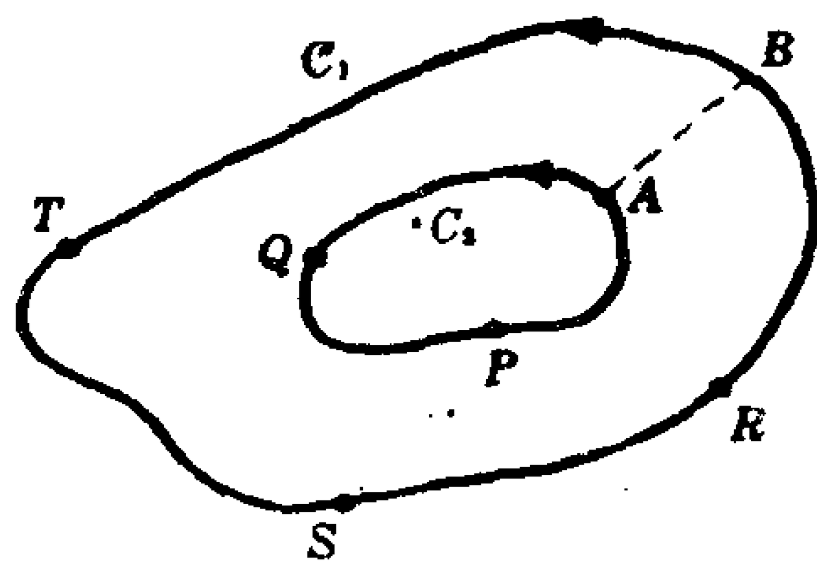


圖 5-11

解 如圖5-11所示，畫一線AB（稱爲橫切，cross-cut）連接C_1上任一點及C_2上任一點。由柯西定理（第19題）

$$\int_{AQPABRSTBA} f(z)\,dz = 0$$

（因$f(z)$在陰影部份及邊界均爲解析），故

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BRSTB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

但 $\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$，故(1)式變爲

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz = -\int_{BRSTB} f(z)\,dz = \int_{BTSRB} f(z)\,dz$$

即
$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

在此 $f(z)$ 在曲線 c_2 內並非一定是可解析。

5.21 (a) 證明 $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & , n=1 \\ 0 & , n=2,3,4,\ldots \end{cases}$

其中 C 爲一簡單封閉曲線，$z=a$ 爲曲線 C 內部之點。

(b) 若 $n=0$，-1，-2，$-3\cdots$，則積分值爲何？

圖 (a) 令 c_1 爲半徑 ϵ，圓心在 $z=a$ 之一圓（見圖5-12）。因在 c 和 c_1 上及其所包圍的區域內，$(z-a)^{-n}$ 均爲可解析，故由20題。

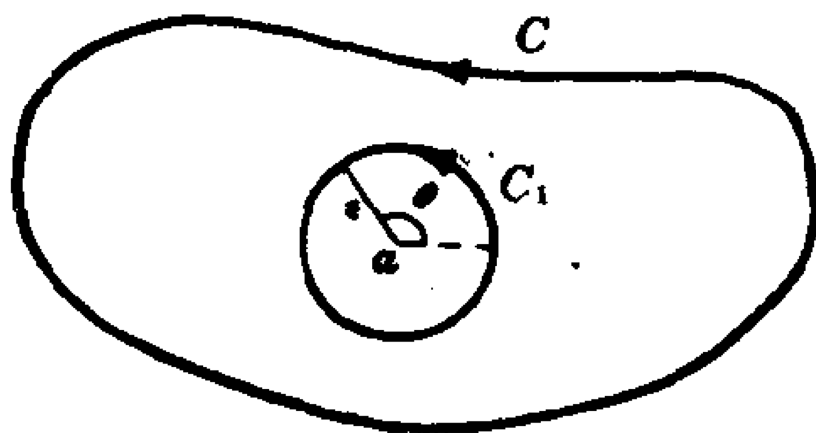


圖5-12

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

在上面積分式中，c_1 上任一點爲 $|z-a|=\epsilon$，即 $z-a=\epsilon e^{i\theta}$ 且 $dz=i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$，故積分式變爲

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\,d\theta = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\Bigg|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{其中 } n \neq 1$$

若 $n=1$，取積分式變爲 $i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$

(b) 當 $n=0$，-1，-2，…時，積分號內的式子爲 1，$(z-a)$，$(z-a)^2$，…，這些函數在 c_1 內均爲可解析（含 $z=a$ 點），故由柯西定理，積分值均爲零。

5.22 計算 $\oint_C \frac{dz}{z-3}$，其中 C 爲(a)一圓 $|z|=1$，(b)一圓 $|z+i|=4$。

圖 (a) 因 $z=3$ 並非在 $|z|=1$ 之內部，故積分值爲零（見19題）。

(b) 因 $z=3$ 在 $|z+i|=4$ 之內部，故積分爲 $2\pi i$（見21題）。

5.23 若 $f(z)$ 在簡單封閉曲線 C 及其內部均爲可解析，而 a 爲 C 內之任意點，證明

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

圖 由20題及21題之圖，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

令 $z-a=\epsilon e^{i\theta}$，則上式右端變爲 $i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta$.，但因 $f(z)$ 爲可解析，故 $f(z)$ 亦爲連續，當 $\epsilon\to 0$ 時，

$$\lim_{\epsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = 2\pi i\, f(a)$$

故得證。

5.24 計算 (a) $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz$, (b) $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}dz$ 其中 C 爲一圓 $|z-1|=3$。

圖 (a) 因 $z=\pi$ 在 C 之內部，故 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz = \cos\pi = -1$（由23題，其中 $f(z)=\cos z$，$a=\pi$），即 $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz = -2\pi i$.

(b)
$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}dz = \oint_C e^z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_C \frac{e^z}{z}dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1}dz$$
$$= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i(1-e^{-1})$$

（由23題，因 $z=0$ 及 $z=-1$ 均在 C 之內部）。

5.25 計算 $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$ 其中 C 爲包含 $z=1$ 之任意簡單封閉曲線。

圖 **解 1**：由柯西積分公式，得 $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$

若 $n=2$ 且 $f(z)=5z^2-3z+2$，則 $f''(1)=10$，故

$$10 = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz \quad \text{即} \quad \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz = 10\pi i$$

解 2：$5z^2-3z+2 = 5(z-1)^2+7(z-1)+4$，故

$$\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz = \oint_C \frac{5(z-1)^2+7(z-1)+4}{(z-1)^3}dz$$

$$= 5\oint_C \frac{dz}{z-1} + 7\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4\oint_C \frac{dz}{(z-1)^3} = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0)$$

$$= 10\pi i$$

（由21題）。

級數及奇點

5.26 當 z 為何值時，下列級數會收斂？

答 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$，第 n 項 $= u_n = \frac{z^n}{n^2 2^n}$，故

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{z^n}\right| = \frac{|z|}{2}$$

由比值審檢法（Ratio test）可知，當 $|z|<2$ 時，原式收斂，當 $|z|>2$ 時原式發散，若 $|z|=2$，則此法失效。

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂，故當 $|z|=2$ 時，絕對值級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2 2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2 2^n}$ 收斂。

故當 $|z|\leq 2$，即在 $|z|=2$ 的內部及邊界時，級數將會收斂（絕對收斂，Converges absolutely）。

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$，因

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-z^2}{2n(2n+1)}\right| = 0$$

故原級數即為 $\sin z$，對任何 z 值均收斂。

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$，因 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(z-i)^n}\right| = \frac{|z-i|}{3}$

因此若 $|z-i|<3$，則原式收斂，若 $|z-i|>3$，則原式發散。

若 $|z-i|=3$，則 $z-i=3e^{i\theta}$，且級數變為 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$，當 $n\to\infty$ 時，第 n 項不趨近於 0，故級數發散。

故級數在圓 $|z-i|=3$ 之內（不含邊界）為收斂。

5.27 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| \leq \mathcal{R}$ 時爲絕對收斂（Absolutely convergent），證明在此範圍內的 z 值，原級數爲一致收斂（Uniformly convergent）。

答 對於複數及複變函數的級數，其定義，定理及證明均和實級數類似。

特別的是，若 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ 在區域 $\mathcal{R}$ 內收斂，則 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 在區域 $\mathcal{R}$ 內爲絕對收斂。我們可證明：若 $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ 在 $\mathcal{R}$ 中收斂，則 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 在 R 中亦收斂，即絕對收斂的級數必收斂。

另外，假設級數 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 在區域 $\mathcal{R}$ 中收斂至一和函數（Sum function）$S(z)$，若對任意 $\epsilon > 0$，我們可求得 N，使得

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon \text{（對所有 } n > N \text{ 均成立）}$$

其中 N 値隨 ϵ 而變，但和在 $\mathcal{R}$ 中的 z 値無關，且

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z)$$

則原級數稱爲一致收斂。

測試一致收斂的一重要方法如下：對所有 R 中的 z，我們可以找到常數 M_n，使得

$$|u_n(z)| \leqq M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{且} \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n \quad \text{收斂}$$

則 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 在 $\mathcal{R}$ 中爲一致收斂。此稱爲瓦士曲士 M 測試法（Weierstrass M test）。

在此題中，我們有

$$|a_n z^n| \leqq |a_n| R^n = M_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

因 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 收斂，故由瓦士曲士 M 測試，可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| \leq R$ 時一致收斂。

5.28 在下列各函數中，找出在 z 平面上所有可能的奇點。

答 (a) $\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$. $z = -1$ 爲 3 階極點。

(b) $\dfrac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2 (z-i)(z-1+2i)}$. $z = 4$ 爲 2 階級點（雙重極點）；$z = i$ 及 $z = 1 - 2i$ 爲 1 階極點（單極點）。

(c) $\frac{\sin mz}{z^2+2z+2}$, $m \neq 0$　因 $z^2+2z+2=0$ 之根爲 $z=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=$ $-1\pm i$，故可寫成 $z^2+2z+2=\{z-(-1+i)\}\{z-(-1-i)\}=(z+1-i)(z+1+i)$.

此函數有兩個單極點 $z=-1+i$ 及 $z=-1-i$。

(d) $\frac{1-\cos z}{z}$.　$z=0$ 似乎爲一奇點，但因爲 $\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z}=0$，故 $z=0$ 爲一可去奇點。

另解：

因 $\frac{1-\cos z}{z}=\frac{1}{z}\left\{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)\right\}=\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}+\cdots$,

由此可看出 $z=0$ 爲一可去奇點。

(e) $e^{-1/(z-1)^2}=1-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}-\cdots$.

此爲洛朗級數，其主要部份包含無限多個非零項，故 $z=1$ 爲本性奇點（Essential singularity）。

(f) e^z。

此函數沒有具有有限值之奇點。然而令 $z=1/u$，可得原式爲 $e^{1/u}$，故 $u=0$ 爲其本性奇點，由此可推知 $z=\infty$ 爲 e^z 的本性奇點。

一般而言，欲決定 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 是否爲一奇點，可令 $z=1/u$ 代入，然後檢查此新函數在 $u=0$ 的各種行爲。

5.29 若 $f(z)$ 在一圓（半徑 R，圓心 a）及其內部均爲可解析，且 $a+h$ 爲此圓內部之任意一點，證明**泰勒定理**（Taylor's theorem）：

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+$$

解 由柯西積分公式（23 題）得

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{z-a-h} \tag{1}$$

但

$$\frac{1}{z-a-h}=\frac{1}{(z-a)\{1-h/(z-a)\}}$$

$$=\frac{1}{(z-a)}\left\{1+\frac{h}{(z-a)}+\frac{h^2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{h^n}{(z-a)^n}+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-h)}\right\} \tag{2}$$

將(2)代入(1)，並利用柯西積分公式，得

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + R_n$$

$$= f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n$$

其中 $$R_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

當 z 在 C 上時，$\left|\frac{f(z)}{z-a-h}\right| \leqq M$，且 $|z-a| = R$，故由第(14)式得（其中 $2\pi R$ 爲 C 之長度）

$$|R_n| \leqq \frac{|h|^{n+1}M}{2\pi R^{n+1}}\cdot 2\pi R$$

當 $n\to\infty$ 時，$|R_n|\to 0$，即 $R_n\to 0$，故得證。

若 $f(z)$ 在一環狀區域 $r_1\leq|z-a|\leq r_2$ 內爲可解析，則我們可將泰勒級數推廣至洛冉級數（見119題）。在某些情況下（如30題），洛冉級數可由已知的泰勒級數求得。

5.30 求出下列函數的洛冉級數（相對於所給的奇點），指出奇點的名稱，並求出級數的收斂範圍。

圖 (a) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$; $z=1$ 令 $z-1=u$，則 $z=1+u$ 且

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{1+u}}{u^2} = e\cdot\frac{e^u}{u^2} = \frac{e}{u^2}\left\{1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\cdots\right\}$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e(z-1)}{3!}+\frac{e(z-1)^2}{4!}+\cdots$$

$z=1$ 爲2階極點，即雙重極點。
此級數對於所有 $z\neq 1$ 均收斂。

(b) $z\cos\frac{1}{z}$; $z=0$.

$$z\cos\frac{1}{z} = z\left(1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\cdots\right) = z-\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{4!\,z^3}-\frac{1}{6!\,z^5}+\cdots$$

$z=0$ 爲本性奇點。
此級數對於所有 $z\neq 0$ 均收斂。

(c) $\frac{\sin z}{z-\pi}$; $z=\pi$ 令 $z-\pi=u$，則 $z=u+\pi$ 且

$$\frac{\sin z}{z-\pi} = \frac{\sin(u+\pi)}{u} = -\frac{\sin u}{u} = -\frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= -1 + \frac{u^2}{3!} - \frac{u^4}{5!} + \cdots = -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \cdots$$

$z = \pi$ 爲可去奇點。
此級數對於所有 z 值均收斂。

(d) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$；$z=-1$ 令 $z+1=u$，則

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{u-1}{u}(1-u+u^2-u^3+u^4-\cdots)$$

$$= -\frac{1}{u} + 2 - 2u + 2u^2 - 2u^3 + \cdots$$

$$= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - \cdots$$

$z=-1$ 爲 1 階極點，即爲單極點。
此級數對於所有 $0<|z+1|<1$ 之 z 值均收斂。

(e) $\frac{1}{z(z+2)^3}$；$z=0,-2$

情況 1：$z=0$，利用二項式定理，

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8z(1+z/2)^3} = \frac{1}{8z}\left\{1 + (-3)\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{8z} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16}z - \frac{5}{32}z^2 + \cdots$$

$z=0$ 爲 1 階極點，即單極點。
當 $0<|z|<2$ 時，級數收斂。
情況 2：$z=-2$，令 $z+2=u$，則

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{1}{-2u^3(1-u/2)} = -\frac{1}{2u^3}\left\{1 + \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{2u^3} - \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{8u} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}u - \cdots$$

$$= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^2} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}(z+2) - \cdots$$

$z=-2$ 爲 3 階極點。
$0<|z+2|<2$ 時，級數收斂。

留數及留數定理

5.31 若 $f(z)$ 在 $z=a$ 為 n 階極點，而在其他各點（簡單封閉曲線 C 及其內部）均為可解析，則 $f(z)$ 可表為

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

其中 $a_{-n} \neq 0$，證明

(a) $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$

(b) $a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$.

解 (a) 積分之，並利用21題，得

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}dz + \cdots + \oint_C \frac{a_{-1}}{z-a}dz + \oint_C \{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\}dz$$
$$= 2\pi i a_{-1}$$

因只留下 a_{-1}，故我們稱 $f(z)$ 在極點 $z=a$ 的留數（Residue）為 a_{-1}。

(b) 乘上 $(z-a)^n$ 可得泰勒級數

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots$$

微分 $n-1$ 次，並令 $z\to a$，可得

$$(n-1)!\,a_{-1} = \lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$$

故得證。

5.32 在所給的極點上，試求函數的留數。

解 (a) $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$；$z=2, i, -i$ 均為單極點，故

在 $z=2$ 的留數為 $\lim_{z\to 2}(z-2)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right\} = \frac{4}{5}$

在 $z=i$ 的留數為 $\lim_{z\to i}(z-i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{i^2}{(i-2)(2i)} = \frac{1-2i}{10}$

在 $z=-i$ 的留數為 $\lim_{z\to -i}(z+i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{i^2}{(-i-2)(-2i)} = \frac{1+2i}{10}$

(b) $\frac{1}{z(z+2)^3}$; $z=0,-2$ $z=0$ 爲單極點，$z=-2$ 爲 3 階極點，故

在 $z=0$ 的留數爲 $\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8}$

在 $z=-2$ 的留數爲 $\lim_{z\to -2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^3\cdot\frac{1}{z(z+2)^3}\right\}$

$$= \lim_{z\to -2}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to -2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^3}\right) = -\frac{1}{8}$$

這些留數亦可由洛冉級數中，$1/z$ 及 $1/z+2$ 的係數求得（見 30 題 (e)）。

(c) $\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$; $z=3$ ，爲 2 階極點或雙重極點，故：

留數爲 $\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left\{(z-3)^2\cdot\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right\} = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}(ze^{zt}) = \lim_{z\to 3}(e^{zt}+zte^{zt})$

$$= e^{3t} + 3te^{3t}$$

(d) $\cot z$; $z=5\pi$ ，爲 1 階極點，故

留數爲 $\lim_{z\to 5\pi}(z-5\pi)\cdot\frac{\cos z}{\sin z} = \left(\lim_{z\to 5\pi}\frac{z-5\pi}{\sin z}\right)\left(\lim_{z\to 5\pi}\cos z\right) = \left(\lim_{z\to 5\pi}\frac{1}{\cos z}\right)(-1)$

$$= (-1)(-1) = 1$$

其中我們用到了羅哈士比托規則，因其可被證明亦適用於複變函數。

5.33 若 $f(z)$ 除了在封閉曲線 C 內的某些極點 a，b，$c\cdots$ 以外，在其餘各點（封閉曲線 C 及其內部）均爲可解析，證明

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\ \{f(z)\text{在極點}\ a, b, c\cdots\text{的留數之和}\}$$

參見圖5-13 。

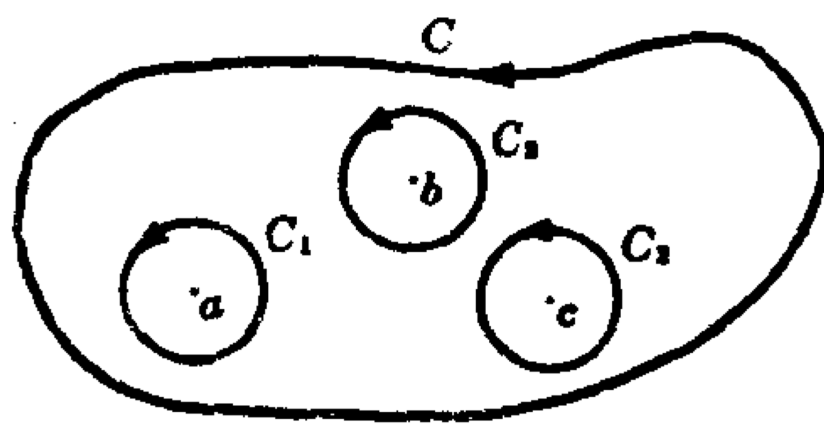


圖 5-13

答 利用和 20 題相同的推論方法（即建立由 C 至 C_1，C_2，$C_3\cdots$的橫切）可得

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots$$

對於極點 a ，

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

故由 31 題，$\oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$

同理，對於極點 b，$f(z) = \frac{b_{-n}}{(z-b)^n} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z-b)} + b_0 + b_1(z-b) + \cdots$

故

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i\, b_{-1}$$

以此類推，可知

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + \cdots) = 2\pi i\,(\text{留數之和})$$

5.34 計算 $\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z-1)(z+3)^2}$ 其中 C 為 (a) $|z| = 3/2$, (b) $|z| = 10$

圖 在單極點 $z=1$ 的留數為 $\lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \frac{e}{16}$

在單極點 $z=-3$ 的留數為

$$\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left\{(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \lim_{z\to -3}\frac{(z-1)e^z - e^z}{(z-1)^2} = \frac{-5e^{-3}}{16}$$

(a) 因 $|z| = 3/2$ 只包含極點 $z=1$

$$\text{故所求積分值} = 2\pi i\left(\frac{e}{16}\right) = \frac{\pi i e}{8}$$

(b) 因 $|z| = 10$ 包含兩極點 $z=1$ 及 $z=-3$

$$\text{故所求積分值} = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right) = \frac{\pi i(e - 5e^{-3})}{8}$$

定積分的計算

5.35 若當 $z = Re^{i\theta}$ 時，$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$（其中 $k > 1$，M 為常數），證明 $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$，其中 Γ 為半徑為 R 之半圓弧，見圖5-14。

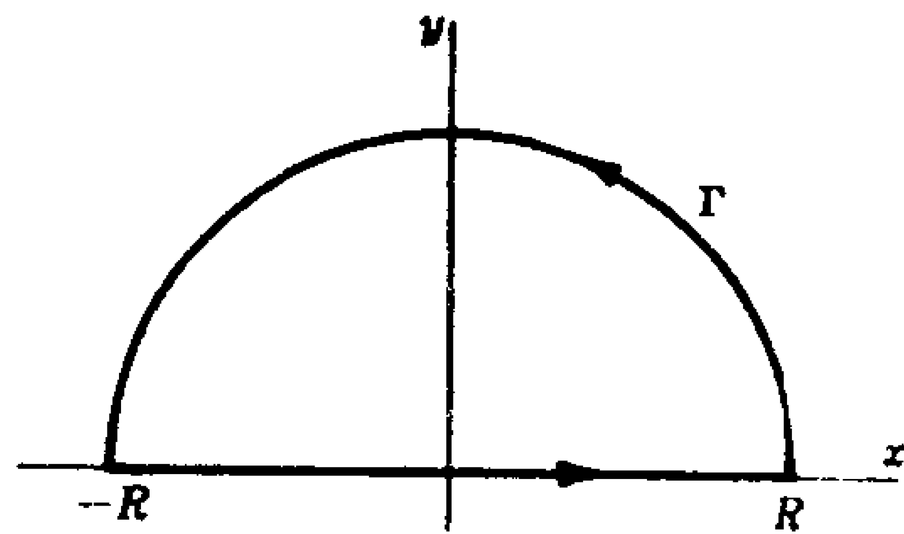


圖 5-14

解　由(14)式，可得

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqq \int_{\Gamma} |f(z)|\,|dz| \leqq \frac{M}{R^k}\cdot\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

但弧長 $L=\pi R$，

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| = 0 \qquad 即 \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

5.36 證明當 $z=Re^{i\theta}$ 時，$|f(z)|\leqq \dfrac{M}{R^k},\ k>1$ 其中 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$

解　若 $z=Re^{i\theta}$，$|f(z)| = \left|\dfrac{1}{1+R^4e^{4i\theta}}\right| \leqq \dfrac{1}{|R^4e^{4i\theta}|-1} = \dfrac{1}{R^4-1} \leqq \dfrac{2}{R^4}$（假設 R 大至不等號可成立，譬如說，$R>2$）故 $M=2$，$k=4$。

其中我們用到不等式 $|z_1+z_2|\geqq|z_1|-|z_2|$ 而 $z_1=R^4e^{4i\theta}$ 且 $z_2=1$。

5.37 計算 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$

解　考慮 $\displaystyle\oint_C\frac{dz}{z^4+1}$，其中 C 爲 35 題中的封閉曲線，乃是由 $-R$ 至 R，及半圓 Γ 所構成，且積分路徑乃沿正（逆時鐘）方向。

因 $z^4+1=0$ 之根爲 $z=e^{\pi i/4},\ e^{3\pi i/4},\ e^{5\pi i/4},\ e^{7\pi i/4}$，此即爲 $1/(z^4+1)$ 的單極點。只有極點 $e^{\pi i/4}$ 及 $e^{3\pi i/4}$ 落於 C 之內部。利用羅哈士比托規則，

$$\begin{aligned}在\ e^{\pi i/4}\ 的留數 &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}}\left\{(z-e^{\pi i/4})\frac{1}{z^4+1}\right\}\\ &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}在\ e^{3\pi i/4}\ 的留數 &= \lim_{z\to e^{3\pi i/4}}\left\{(z-e^{3\pi i/4})\frac{1}{z^4+1}\right\}\\ &= \lim_{z\to e^{3\pi i/4}}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4}\end{aligned}$$

故
$$\oint_C\frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left\{\tfrac{1}{4}e^{-3\pi i/4}+\tfrac{1}{4}e^{-9\pi i/4}\right\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

即
$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+1}+\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

在(2)式中，令$R\to\infty$，並利用36題的結果，得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

但 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$，故所求即爲 $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

5.38 證明 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}$

解 $\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ 之極點落於曲線C（35題）之內部者，爲$z=i$（2階）及$z=-1+i$（1階）

在$z=i$之留數爲 $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{9i-12}{100}$

在$z=-1+i$之留數爲 $\displaystyle\lim_{z\to-1+i}(z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25}$

故 $$\oint_C\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i\left\{\frac{9i-12}{100}+\frac{3-4i}{25}\right\} = \frac{7\pi}{50}$$

即 $$\int_{-R}^{R}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} + \int_{\Gamma}\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{7\pi}{50}$$

令$R\to\infty$，則第二積分式趨近於零（見35題），故得證。

5.39 計算 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$

解 令$z=e^{i\theta}$，則 $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$

故 $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \oint_C\frac{dz/iz}{5+3\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} = \oint_C\frac{2\,dz}{3z^2+10iz-3}$$

其中C爲以原點爲圓心的單位圓，如圖5-15所示。

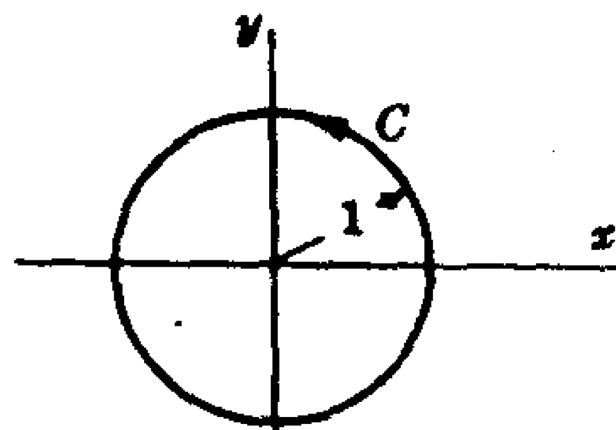


圖5-15

$\frac{2}{3z^2+10iz-3}$ 之極點爲單極點爲

$$z = \frac{-10i \pm \sqrt{-100+36}}{6} = \frac{-10i \pm 8i}{6} = -3i,\ -i/3.$$

只有 $-i/3$ 落於 C 內部

在 $-i/3$ 的留數 $\lim_{z\to -i/3}\left(z+\frac{i}{3}\right)\left(\frac{2}{3z^2+10iz-3}\right) = \lim_{z\to -i/3}\frac{2}{6z+10i} = \frac{1}{4i}$

（利用羅哈士比托規則）

故 $\oint_C \frac{2\,dz}{3z^2+10iz-3} = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$，為所求之值

5.40 證明 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{12}$

解 若 $z=e^{i\theta}$ 則，$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$，$\cos 3\theta = \frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2} = \frac{z^3+z^{-3}}{2}$，$dz = iz\,d\theta$

故 $$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \oint_C \frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-4\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,dz$$

其中 C 為 39 題中的曲線。

原式在 C 內部有 3 階極點 $z=0$ 及單極點 $z=½$。

在 $z=0$ 的留數為 $\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3\cdot\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = \frac{21}{8}$

在 $z=½$ 的留數為 $\lim_{z\to 1/2}\left\{(z-\frac{1}{2})\cdot\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = -\frac{65}{24}$

故 $-\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,dz = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left\{\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right\} = \frac{\pi}{12}$ 得證。

5.41 若當 $z=Re^{i\theta}$ 時，$|f(z)| \leqq \frac{M}{R^k}$（其中 $k>0$，M 為常數），證明

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{imz}f(z)\,dz = 0$$

其中 Γ 為 35 題中的半圓弧，且 m 為常數（$m>0$）。

若 $z = Re^{i\theta}$, $\int_\Gamma e^{imz} f(z)\,dz = \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\,d\theta$

則 $$\left|\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \leq \int_0^\pi \left|e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\right| d\theta$$
$$= \int_0^\pi \left|e^{imR\cos\theta - mR\sin\theta} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\right| d\theta$$
$$= \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta} |f(Re^{i\theta})|\, R\,d\theta$$
$$\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta}\,d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta$$

因當 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 時，$\sin\theta \geq 2\theta/\pi$（見第七章，第3題），故最後一個積分式將小或等於

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}\,d\theta = \frac{\pi M}{mR^k}(1 - e^{-mR})$$

因 m，k 均大於零，故當 $R \to \infty$ 時，上式趨近於零，故原式得證。

5.42 證明 $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$

解 考慮 $\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz$ 其中 C 為35題中的路徑。

原式在 $z = \pm i$ 為單極點，但只有 $z = i$ 落於 C 之內部。

在 $z = i$ 的留數為 $\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}$

故 $$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) = \pi e^{-m}$$

即 $$\int_{-R}^R \frac{e^{imx}}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

展開得 $$\int_{-R}^R \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + i\int_{-R}^R \frac{\sin mx}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

所以 $$2\int_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

令 $R \to \infty$，則沿 Γ 的積分趨近於零（見41題），故得證。

5.43 證明 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

解 由42題的方法，使我們考慮將 e^{iz} 沿35題的路徑積分。但 $z=0$ 亦在積分路徑上，但我們無法在奇點積分，所以積分路徑必須繞過 $z=0$ 這一點，如圖5-16所示，此路徑 $ABDEFGHJA$ 稱爲 C'。

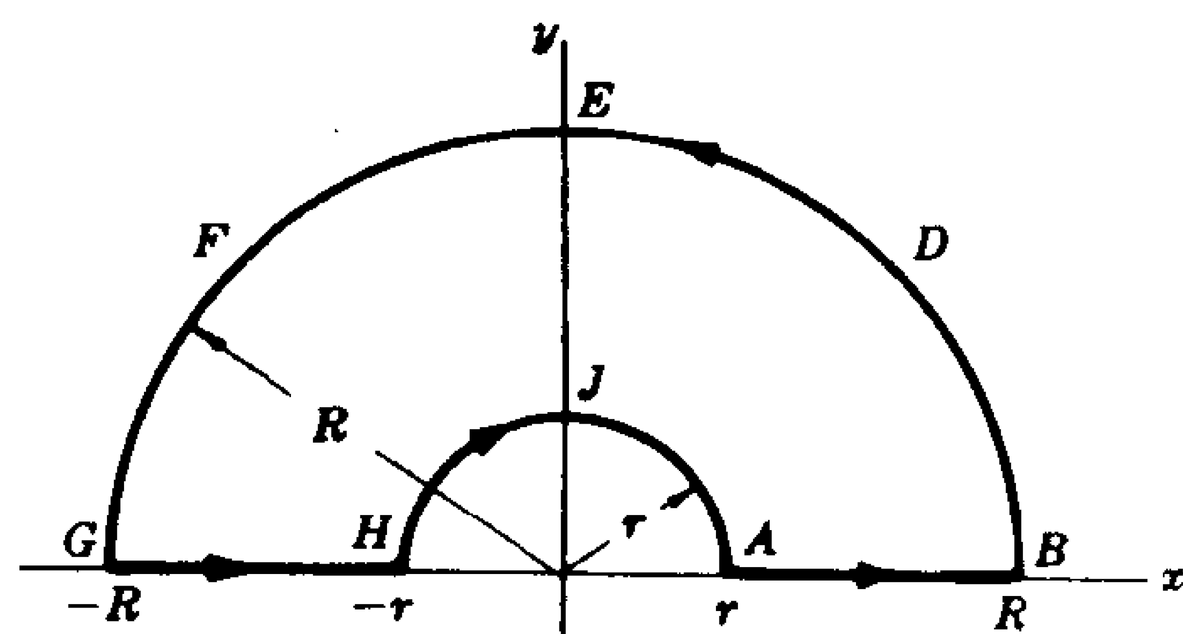


圖5-16

因 $z=0$ 落於 C' 之外部，故

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

即
$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

於第一積分式中，以 $-x$ 取代 x，然後和第三積分式合併，可得

$$\int_{r}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

即
$$2i\int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

令 $r\to 0$ 且 $R\to\infty$，則由41題可知，等號右端的第二積分式趨近於零。由於積分號可和極限符號對調，故等號右端的第一積分式變爲

$$-\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}\,ire^{i\theta}\,d\theta = -\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} ie^{ire^{i\theta}}\,d\theta = \pi i$$

故得
$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} 2i\int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi i \quad \text{即} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

其他各類問題

5.44 定義自 z 平面（xy 平面）至 w 平面（uv 平面）的變換 $w=z^2$。考慮在 z 平面的三角形，頂點爲 $A(2,1)$，$B(4,1)$，$C(4,3)$，(a)證明此三角形在 $w=z^2$ 作用之下的**像**（Image）或**映象**（Mapping）爲 uv 平面上的曲線三角形（（Curvilinear triangle）(b)求此曲線三角形的各個內角大小，並和原三角形比較。

解 (a) 因$w=z^2$，故$u=x^2-y^2$，$v=2xy$為變換方程式。在xy平面上的點$A(2,1)$映至uv平面上的點$A'(3,4)$（見下圖）。同理，點B及點C分別映至點B'及點C'。三角形ABC的線段AC，BC，AB，分別映至曲線三角形$A'B'C'$的拋物線段$A'C'$，$B'C'$，$A'B'$，其方程式見圖5-17(a)及(b)。

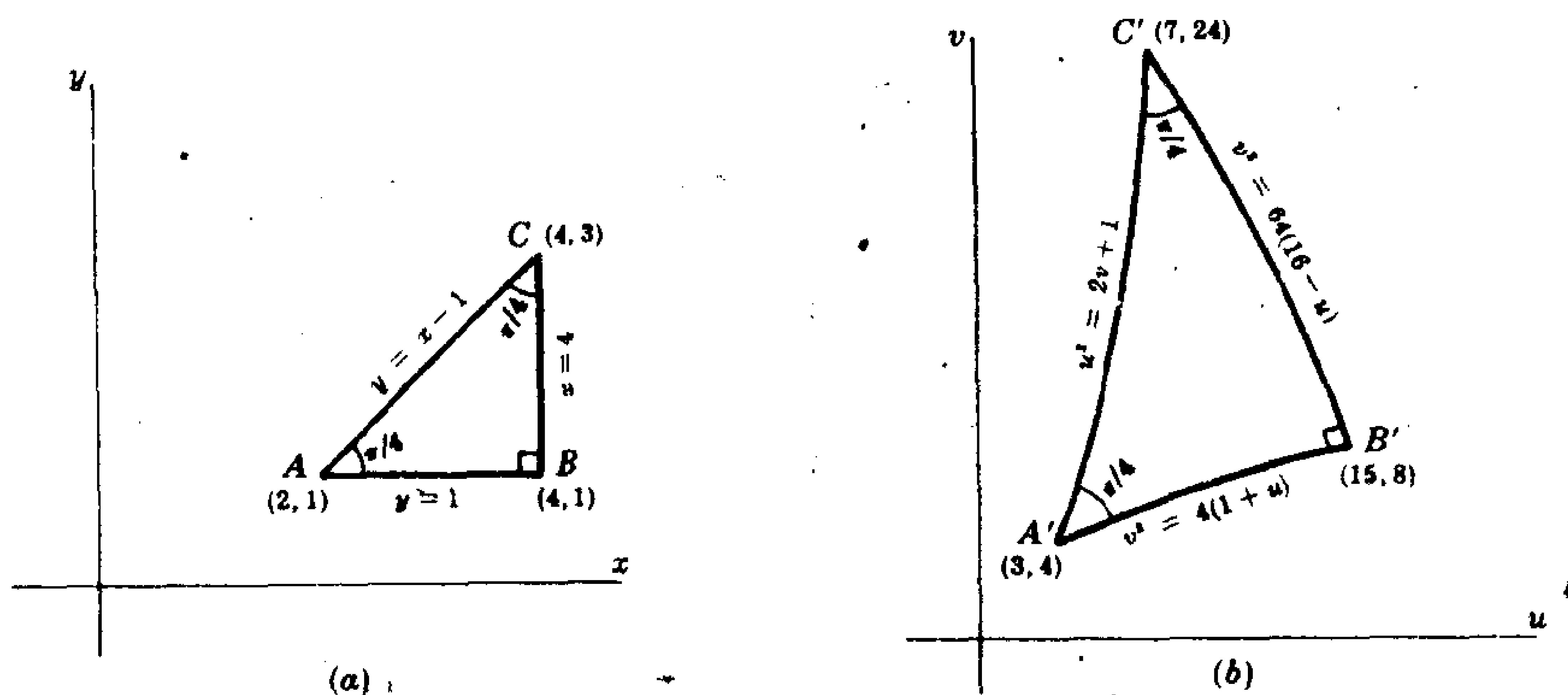


圖5-17

(b) 曲線$v^2=4(1+u)$在$(3,4)$的切線斜率為 $m_1=\left.\dfrac{dv}{du}\right|_{(3,4)}=\left.\dfrac{2}{v}\right|_{(3,4)}=\dfrac{1}{2}$

曲線$u^2=2v+1$在$(3,4)$的切線斜率為 $m_2=\left.\dfrac{dv}{du}\right|_{(3,4)}=u=3$

故此兩曲線在A'點形成之角度θ為

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+(3)(\frac{1}{2})}=1,\quad 即\quad \theta=\pi/4$$

同理可得$A'C'$及$B'C'$形成之角度為$\pi/4$，而$A'B'$及$B'C'$形成之角度為$\pi/2$。故曲線三角形的各個內角和原三角形相同。一般而言，若$w=f(z)$為一變換，且$f(z)$為解析，則只要$f'(z_0)\neq 0$，那麼在z平面相交於z_0的兩曲線形成之夾角，經$f(z)$作用後，其影像之夾角不變（大小及方向均不變），此稱為解析函數的**保角性質**（Conformal property），故$f(z)$亦稱為**保角轉換**（Conformal transformation）或**保角映象函數**（Conformal mapping function）。

5.45 令$w=\sqrt{z}$為自z平面至w平面的變換。有一點沿著單位圓$|z|=1$反時鐘方向移動，證明：當此點第一次回到起點時，其象點尚未到達起點，而當此點第二次回到起點時，其象點才第一次到達起點。

解 令$z=e^{i\theta}$，則$w=\sqrt{z}=e^{i\theta/2}$，設$\theta=0$代表起點，即$z=1$且$w=1$（對應

於圖 5-18(a)及(b)的 A 和 P 點）。

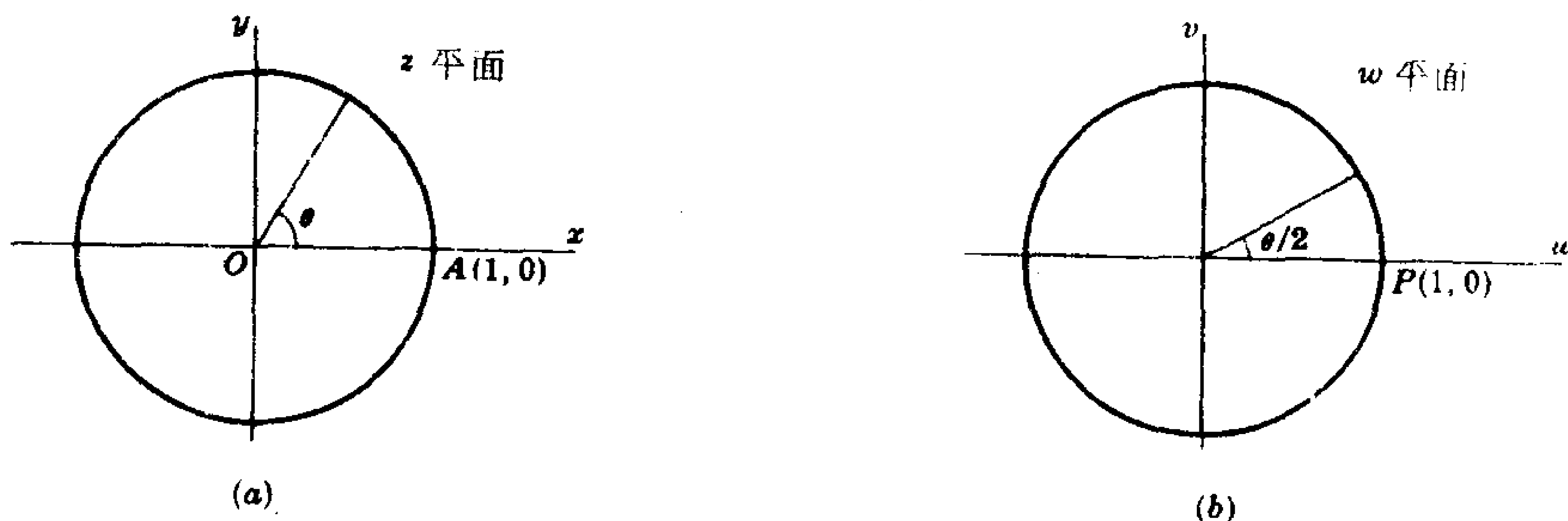


圖 5-18

當在 z 平面繞完第一圈時，$\theta = 2\pi$，$z = 1$，但 $w = e^{i\theta/2} = e^{i\pi} = -1$，即其像點尚未回到起點。

然而，當在 z 平面繞完第二圈時，$\theta = 4\pi$，$z = 1$，而 $w = e^{i\theta/2} = e^{2\pi i} = 1$，故其像點第一次回到起點。

由上可知，w 並非是 z 的單值函數，而是 z 的雙值函數（Double-valued function），亦即給定一個 z，則有兩個 w 值與之對應。若我們限制 w 爲單值函數，則我們就必須限制 θ 的範圍，例如，取 $0 < \theta < 2\pi$（亦可取其他範圍），這代表雙值函數 $w = \sqrt{z}$ 的一個分枝（Branch）。在此範圍之外，即 $2\pi < \theta < 4\pi$，這又代表 $w = \sqrt{z}$ 的另一分枝。在旋轉開始點 $z = 0$ 稱爲分枝點（Branch point）。或者我們可限制 z 值在繞 $|z| = 1$ 時，不跨越 Ox 線，則 $f(z) = \sqrt{z}$ 就成爲單値函數。其中 Ox 稱爲分枝線（Branch line）。

5.46 證明 $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

解 考慮 $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$。因 $z = 0$ 爲分枝點，選積分路徑如圖 5-19 所示，其中 AB 及 GH 事實上已和 x 軸重合，爲使圖形清晰，我們將它分開畫。

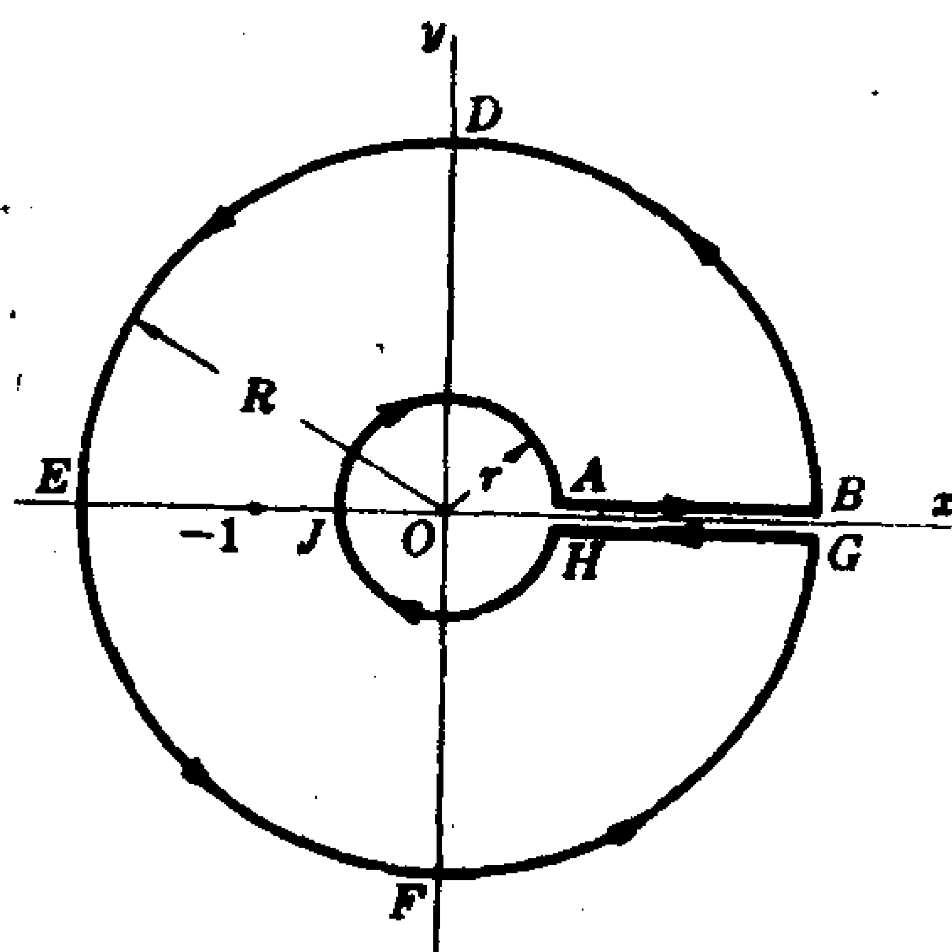


圖 5-19

被積函數（Integrand）在 C 內部有一極點 $z = -1$

在 $z = -1 = e^{\pi i}$ 的留數爲

$$\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z} = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}$$

故 $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$

暫時省略被積函數不寫，得

$$\int_{AB} + \int_{BDEFG} + \int_{GH} + \int_{HJA} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

故

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}\, iRe^{i\theta}\, d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(re^{i\theta})^{p-1}\, ire^{i\theta}\, d\theta}{1+re^{i\theta}} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

其中在沿GH積分時，$z = xe^{2\pi i}$（因經過$BDEFG$時，z之幅角增加2π）

令$r \to 0$，$R \to \infty$，則第二及第四積分式趨近於零，故

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_{\infty}^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi\, e^{(p-1)\pi i}$$

即

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)})\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

所以

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

補充題

複數、極式

5.47 執行下列運算

(a) $2(5-3i) - 3(-2+i) + 5(i-3)$ (c) $\frac{5}{3-4i} + \frac{10}{4+3i}$ (e) $\left|\frac{2-4i}{5+7i}\right|^2$

(b) $(3-2i)^3$ (d) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ (f) $\frac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$

答 (a) $1-4i$, (b) $-9-46i$, (c) $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$, (d) -1, (e) $\frac{10}{37}$, (f) $\frac{16}{5} - \frac{2}{5}i$

5.48 若z_1，z_2為複數，證明 (a) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$，(b) $|z_1^2| = |z_1|^2$ 說明是否須加諸任何條件。

5.49 證明 (a) $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$，(b) $|z_1+z_2+z_3| \leqq |z_1|+|z_2|+|z_3|$，(c) $|z_1-z_2| \geqq |z_1|-|z_2|$。

5.50 求下列方程式之所有解 $2z^4 - 3z^3 - 7z^2 - 8z + 6 = 0$。 答 $3, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

5.51 若z_1，z_2在阿干圖（Argand diagram）中分別以P_1，P_2表示。連接OP_1及OP_2，其中O為原點。證明z_1+z_2可以點P_3表示，其中OP_3為以OP_1及OP_2為兩邊的平行四邊形的對角線。此稱為複數相加的平行四邊形法則（Parallelogram law）。因為有此特性及其他各種性質，複數可視為平面上的向量（vectors）。

5.52 說明49題不等式的幾何意義。

5.53 將下式表爲極式 (a) $3\sqrt{3}+3i$, (b) $-2-2i$, (c) $1-\sqrt{3}\,i$, (d) 5, (e) $-5i$

答 (a) $6 \text{ cis } \pi/6$, (b) $2\sqrt{2} \text{ cis } 5\pi/4$, (c) $2 \text{ cis } 5\pi/3$, (d) $5 \text{ cis } 0$, (e) $5 \text{ cis } 3\pi/2$

5.54 計算 (a) $[2(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)][5(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)]$, (b) $\dfrac{12 \text{ cis } 16^\circ}{(3 \text{ cis } 44^\circ)(2 \text{ cis } 62^\circ)}$

答 (a) $-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,i$, (b) $-2i$

5.55 求下列之方根值，並圖示：

(a) $(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i)^{1/3}$, (b) $(-1)^{1/5}$, (c) $(\sqrt{3}-i)^{1/3}$, (d) $i^{1/4}$

答 (a) $2 \text{ cis } 15^\circ$, $2 \text{ cis } 135^\circ$, $2 \text{ cis } 255^\circ$

(b) $\text{cis } 36^\circ$, $\text{cis } 108^\circ$, $\text{cis } 180^\circ = -1$, $\text{cis } 252^\circ$, $\text{cis } 324^\circ$

(c) $\sqrt[3]{2} \text{ cis } 110^\circ$, $\sqrt[3]{2} \text{ cis } 230^\circ$, $\sqrt[3]{2} \text{ cis } 350^\circ$

(d) $\text{cis } 22.5^\circ$, $\text{cis } 112.5^\circ$, $\text{cis } 202.5^\circ$, $\text{cis } 292.5$

5.56 若 $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ 且 $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$，證明 (a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{ cis } (\theta_1+\theta_2)$, (b) $z_1/z_2 = (r_1/r_2) \text{ cis } (\theta_1-\theta_2)$
解釋其幾何意義。

函數，極限，連續性

5.57 描述下列軌跡 (a) $|z+2-3i|=5$, (b) $|z+2|=2|z-1|$, (c) $|z+5|-|z-5|=6$
並圖示之。

答 (a) 圓 $(x+2)^2+(y-3)^2=25$，圓心 $(-2,3)$，半徑 5 。

(b) 圓 $(x-2)^2+y^2=4$，圓心 $(2,0)$，半徑 2 。

(c) 拋物線之一支 $x^2/9-y^2/16=1$，其中 $x \geqq 3$ 。

5.58 下列各式在 z 平面上所形成的區域爲何？

(a) $|z-2+i| \geqq 4$, (b) $|z| \leqq 3$, $0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{4}$, (c) $|z-3|+|z+3| < 10$

試圖示之。

答 (a) 圓 $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ 的邊界及內部。

(b) 第一象限內，由 $x^2+y^2=9$，x 軸，$y=x$ 圍成之區域。

(c) 橢圓 $x^2/25+y^2/16=1$ 之內部。

5.59 將下列各函數表爲 $u(x,y)+iv(x,y)$ 之形式，其中 u，v 爲實數。

(a) z^3+2iz, (b) $z/(3+z)$, (c) e^{z^2}, (d) $\ln(1+z)$

答 (a) $u = x^3-3xy^2-2y$, $v = 3x^2y-y^3+2x$

(b) $u = \dfrac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v = \dfrac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$

(c) $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$

(d) $u = \frac{1}{2}\ln\{(1+x)^2+y^2\}$, $v = \tan^{-1}\dfrac{y}{1+x}+2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.60 證明(a) $\lim_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$ ，(a)由定義可直接得出 $f(z) = z^2$ 在 $z = z_0$ 連續。

5.61 (a) 若 $z = w$ 爲 $z^5 = 1$ 中，不爲 1 的一根，證明所有根爲 $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$。

(b) 證明 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$

(c) 將(a)、(b)之結論推廣到 $z^n = 1$

導式，柯西－里曼方程式

5.62 (a) 若 $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$ ，由定義直接求 $\frac{dw}{dz}$。

(b) $f(z)$ 在那個有限 z 值爲不可解析？

答 (a) $1 - 1/z^2$, (b) $z = 0$

5.63 給定函數 $w = z^4$ (a)求出實函數 u ，v 使得 $w = u + iv$ (b)證明柯西－里曼函數在 z 平面上的所有有限 z 值均成立，(c)證明 u ，v 爲諧和函數，(d)求 dw/dz。

答 (a) $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $v = 4x^3y - 4xy^3$ (d) $4z^3$

5.64 證明 $f(z) = z\,|\,z\,|$ 在任何點均不可解析。

5.65 證明 $f(z) = \frac{1}{z-2}$ 在 $z \neq 2$ 之任意點均爲可解析。

5.66 若一解析函數之虛部爲 $2x(1-y)$ ，求(a)實部(b)此函數。

答 (a) $y^2 - x^2 - 2y + c$, (b) $2iz - z^2 + c$ ，其中 c 爲實數。

5.67 求一解析函數，其實部爲 $e^{-x}(x\cos y + y\sin y)$，且 $f(0) = 1$。

答 $ze^{-z} + 1$

5.68 證明不存在解析函數，使得其虛部爲 $x^2 - 2y$。

5.69 求 $f(z)$ ，使得 $f'(z) = 4z - 3$ 且 $f(1+i) = -3i$ 。答 $f(z) = 2z^2 - 3z + 3 - 4i$

線積分

5.70 計算 $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ 積分路徑爲(a)拋物線 $y^2 = x$ (b)直線(c)自 $(1,1)$ 至 $(1,2)$，再至 $(4,2)$ 的直線(d)曲線 $x = 2t^2 + t + 1$ ，$y = t^2 + 1$。

答 (a) 34/3, (b) 11, (c) 14, (d) 32/3

5.71 計算 $\oint (2x - y + 4)\,dx + (5y + 3x - 6)\,dy$ ，積分路徑爲 xy 平面上的三角形，其頂點爲 $(0,0)$，$(3,0)$，$(3,2)$，且沿反時鐘方向積分。答 12 。

5.72 計算上題之線積分，但積分路徑改爲圓心 $(0,0)$，半徑 4 之圓。

答 64π

平面上之革忍定理，和路徑無關之線積分

5.73 驗證平面上之革忍定理：$\oint_C (x^2 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$，其中C爲正方形，頂點爲（0，0），（2，0），（2，2），（0，2）。答 積分值均爲8。

5.74 (a) 若C爲任意簡單封閉曲線，其包圍之面積爲A，證明（a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3均爲常數）：

$$\oint_C (a_1x + a_2y + a_3)\,dx + (b_1x + b_2y + b_3)\,dy = (b_1 - a_2)A$$

(b) 在何種條件下，會使得上式積分值沿任何路徑C均爲零？答 (b) $a_2 = b_1$

5.75 求內擺線（Hypocycloid）$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 所圍區域之面積。
（提示：參數方程式爲 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi$）。答 $3\pi a^2/8$

5.76 若 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$，證明 $\frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int r^2\,d\theta$，並解釋其意義。

5.77 (a) 驗證平面上的革忍定理：$\oint_C (x^3 - x^2y)\,dx + xy^2\,dy$，其中$c$爲由同心圓$x^2 + y^2 = 4$及$x^2 + y^2 = 16$所圍區域的邊界(b)由革忍定理計算71題及72題。
答 (a) 均爲120π。

5.78 (a) 證明$\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\,dx + (x^2 - 4xy^3)\,dy$之值和連接（1，0）及（2，1）之路徑無關。(b)計算(a)之積分值。答 (b) 5。

積分，柯西定理，柯西積分公式

5.79 計算 $\int_{1-2i}^{3+i} (2z + 3)\,dz$:

(a) 沿 $x = 2t + 1,\ y = 4t^2 - t - 2$，其中$0 \leq t \leq 1$。
(b) 沿連接$1 - 2i$及$3 + i$的直線。
(c) 沿由$1 - 2i$至$1 + i$，再至$3 + i$的直線。
答 均爲$17 + 19i$。

5.80 計算 $\int_C (z^2 - z + 2)\,dz$，其中C爲單位圓$|z| = 1$的上半部，且沿正方向積分。
答 $-14/3$。

5.81 計算 $\oint_C \frac{z\,dz}{2z-5}$ ，其中 C 爲圓 (a) $|z|=2$, (b) $|z-3|=2$ 　答 (a) 0, (b) $5\pi i/2$

5.82 計算 $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}dz$ ，其中 C 爲(a)頂點爲 $-1-i, -1+i, -3+i, -3-i$ 之正方形，(b)一圓 $|z+i|=3$ ，(c)一圓 $|z|=\sqrt{2}$ 。答 (a) $-8\pi i/3$ (b) $-2\pi i$ (c) $2\pi i/3$

5.83 計算 (a) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1}dz$, (b) $\oint_C \frac{e^z+z}{(z-1)^4}dz$ ，其中 C 爲任意包含 $z=1$ 的簡單封閉曲線。

答 (a) $-2\pi i$ (b) $\pi ie/3$

5.84 證明柯西積分公式。
（提示：利用導式之定義，並以數學歸納法證之）

級數及奇點

5.85 何種 z 值使得下列級數收斂？

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^n}{n+1}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n!(z^2+2z+2)^{2n}$

答 (a) 所有 z 均可 (b) $|z-i|<1$ (c) $z=-1\pm i$

5.86 證明級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ 爲(a)絕對收斂，(b)當 $|z|\leq 1$ 時，爲一致收斂。

5.87 證明在滿足 $|z+i|<R<2$ 的任意圓（半徑爲 R ）內，級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$ 爲一致收斂。

5.88 找出下列各函數在有限 z 平面上的奇點，並指出其名稱。

(a) $\frac{z-2}{(2z+1)^4}$, (b) $\frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$, (c) $\frac{z^2+1}{z^2+2z+2}$, (d) $\cos\frac{1}{z}$, (e) $\frac{\sin(z-\pi/3)}{3z-\pi}$, (f) $\frac{\cos z}{(z^2+4)^2}$

答 (a) $z=-\frac{1}{2}$ ，4 階極點。
(b) $z=1$ ，單極點，$z=-2$ ，雙重極點。
(c) $z=-1\pm i$ ，單極點。
(d) $z=0$ ，本性奇點。
(e) $z=\pi/3$ ，可去奇點。
(f) $z=\pm 2i$ ，雙重極點。

5.89 求下列各函數的洛冉函數（相對於所給定之奇點），並指出奇點的名稱，及使級數收斂的 z 值範圍。

(a) $\frac{\cos z}{z-\pi}$; $z=\pi$ (b) $z^2 e^{-1/z}$; $z=0$ (c) $\frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$; $z=1$

答 (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$, 單極點，所有的 $z\neq\pi$

(b) $z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} - \frac{1}{5!\,z^3} + \cdots$，本性奇點，所有的 $z \neq 0$

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{7}{16(z-1)} + \frac{9}{64} - \frac{9(z-1)}{256} + \cdots$，雙重極點，$0 < |z-1| < 4$

留數及留數定理

5.90 求出下列各函數在其極點的留數：

(a) $\frac{2z+3}{z^2-4}$，(b) $\frac{z-3}{z^3+5z^2}$，(c) $\frac{e^{zt}}{(z-2)^3}$，(d) $\frac{z}{(z^2+1)^2}$

答 (a) $z=2;\ 7/4,\quad z=-2;\ 1/4$　(c) $z=2;\ \frac{1}{2}t^2e^{2t}$
(b) $z=0;\ 8/25,\quad z=-5;\ -8/25$　(d) $z=i;\ 0,\quad z=-i;\ 0$

5.91 求出 $e^{zt}\tan z$ 在單極點 $z=3\pi/2$ 的留數。答 $-e^{3\pi t/2}$

5.92 計算 $\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z+1)(z+3)}$，其中 C 爲包含所有極點的簡單封閉曲線。答 $-8\pi i$

5.93 若 C 爲包含 $z=\pm i$ 的簡單封閉曲線，證明

$$\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{1}{2}t\sin t$$

5.94 若 $f(z)=P(z)/Q(z)$，其中 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 均爲多項式，且 $P(z)$ 的次數至少比 $Q(z)$ 少 2，證明 $\oint_C f(z)\,dz = 0$，其中 C 包含了 $f(z)$ 的所有極點。

定積分的計算

利用線積分，驗證下列等式：

5.95 $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

5.96 $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+a^6} = \frac{2\pi}{3a^5}$，$a>0$

5.97 $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}$

5.98 $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx = \frac{\pi}{3}$

5.100 $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{\pi}{9}$

5.101 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

5.102 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

5.103 $\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{8}$

5.99 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+a^4)^2} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} a^{-7}, \quad a>0$

5.104 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\sin^2\theta)^2} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$

5.105 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}, \quad n=0,1,2,3,\ldots, \quad 0<a<1$

5.106 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^3} = \frac{(2a^2+b^2)\pi}{(a^2-b^2)^{5/2}}, \quad a>|b|$

5.107 $\int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+4} dx = \frac{\pi e^{-4}}{4}$

5.110 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi(2e-3)}{4e}$

5.108 $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+4} dx = \frac{\pi e^{-\pi}}{8}$

5.111 $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

5.109 $\int_0^{\infty} \frac{x\sin \pi x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{4}$

5.112 $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$

5.113 考慮 $\oint_C \frac{e^{iz}}{\cosh z}$ ，其中C爲頂點在$(-R,0), (R,0), (R,\pi), (-R,\pi)$的長方形，再令$R\to\infty$即得。

其他各類問題

5.114 若$z=re^{i\theta}$ 且 $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ ，其中r及θ爲極座標，證明柯西-里曼方程式爲

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

5.115 定義一個自z平面變換至w平面的解析函數$w=f(z)$，其中$z=x+iy$，$w=u+iv$，證明此轉換之亞克比行列式(Jacobian of the transformation)爲

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2$$

5.116 若$F(x,y)$經$w=f(z)$之作用，變換成$G(u,v)$，證明若 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$ ，則在$f'(z)\neq 0$之任意點，均有 $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}=0$

5.117 證明在雙線性變換(Bilinear transformation) $w=\frac{az+b}{cz+d}$ (但$ad-bc\neq 0$)的作用下，z平面上的圓可變換成w平面上的圓。

5.118 若 $f(z)$ 在圓 $|z-a|=R$ 及其內部均爲可解析，證明柯西不等式，即

$$|f^{(n)}(a)| \leqq \frac{n!M}{R^n}$$

其中在圓上各點時，$|f(z)| \leq M$。［提示：利用柯西積分公式］

5.119 c_1，c_2 爲圓心在 a，半徑分別是 r_1，r_2 的同心圓，其中 $r_1 < r_2$。若 $a+h$ 爲由 c_1，c_2 包圍之環狀區域中的任意點，且 $f(z)$ 在此區域中爲可解析，證明洛冉定理（Laurent's theorem）。

$$f(a+h) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n h^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

其中 C 爲在環狀區域中，包含 C_1 的任意封閉曲線。

提示：寫成 $f(a+h) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{C_2}\frac{f(z)\,dz}{z-(a+h)} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{z-(a+h)}$，將 $\dfrac{1}{z-a-h}$

以兩種不同方式展開。

5.120 求出 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 的洛冉級數展開，且此級數在 $1<|z|<2$ 時收斂，其餘地方則發散。

提示：寫成 $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)} = \dfrac{-1}{z+1}+\dfrac{2}{z+2} = \dfrac{-1}{z(1+1/z)}+\dfrac{1}{1+z/2}$

答 $\cdots - \dfrac{1}{z^5}+\dfrac{1}{z^4}-\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^3}{8}+\cdots$

第六章

傅立葉級數及積分

6·1 傅立葉級數

若$F(x)$滿足下列條件：

1. $F(x)$定義於區間$c<x<c+2l$。
2. $F(x)$和$F'(x)$在$c<x<c+2l$間均爲分段連續。
3. $F(x+2l)=F(x)$，即$F(x)$之週期爲$2l$。

則在每個連續點上，可得

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

若在不連續點，則(1)式左端改爲½ $\{F(x+0)+F(x-0)\}$，即改爲不連續點的左右平均值。

(1)式的級數（其係數爲(2)）稱$F(x)$的**傅立葉級數**（Fourier series，簡稱傅氏級數）。在許多題目中，$c=0$或$-l$。若$l=\pi$，則$F(x)$週期爲2π，(1)及(2)式將可簡化許多。

上述條件稱爲**狄里西雷條件**（Dirichlet conditions），爲傅氏級數收斂的充分條件（非必要條件）。

6·2 奇函數及偶函數

若$F(-x)=-F(x)$，則函數$F(x)$爲奇（Odd），如x^3，x^5-3x^3+2x，$\sin x$，$\tan 3x$等均爲奇函數。

若$F(-x)=F(x)$，則函數$F(x)$爲偶（Even），如x^4，$2x^6-4x^2+5$，$\cos x$ e^x+e^{-x}等均爲偶函數。

圖 6-1 及 6-2 分別是奇函數及偶函數，但圖 6-3兩者都不是。

在奇函數的傅氏級數展開時，只有正弦項保留下來，而在偶函數的傅氏級數展開時，只有餘弦項（可能包含一可被視爲餘弦項的常數）保留下來。

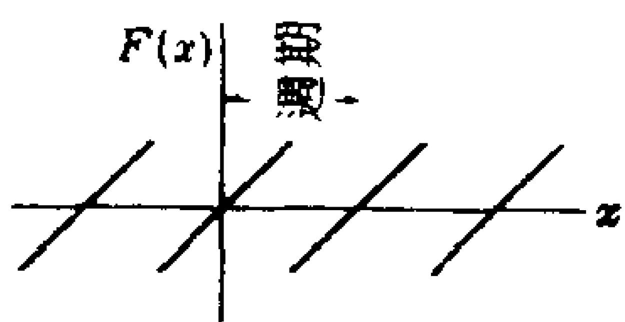


圖 6-1

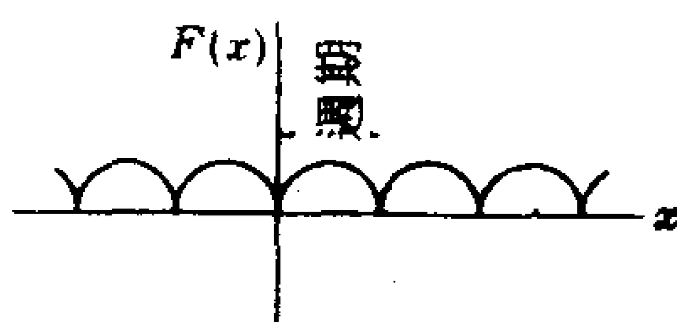


圖 6-2

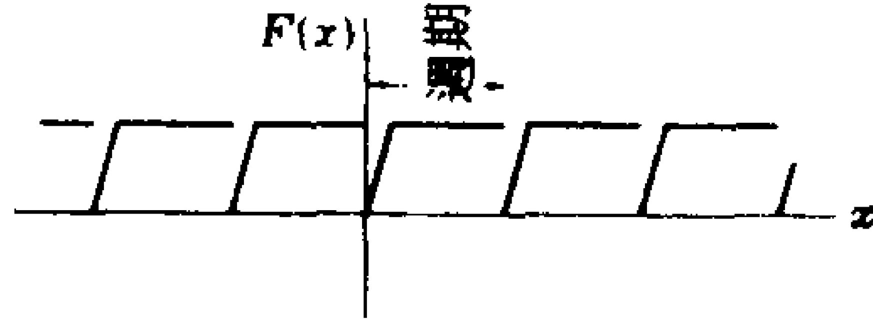


圖 6-3

6-3 半幅傅氏正弦及餘弦級數

在一傅氏級數中，若只出現正弦（餘弦）項，則稱之爲半幅傅氏正弦（餘弦）級數。欲求所給函數的半幅級數，通常先在（0，l）間定義此函數（因只在（0，l）間定義，爲（$-l$，l）的一半，故稱半幅，Half range），然後指明此函數爲奇或偶，則即可知道在另一半區間（$-l$，0）之函數定義爲何。如下述

$$\left.\begin{aligned} a_n=0,\quad b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \text{此爲半幅正弦級數} \\ b_n=0,\quad a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \text{此爲半幅餘弦級數} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

6-4 傅氏級數的複數形式

傅氏級數(1)及其係數(2)可以複數表示爲

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l} \tag{4}$$

其中取$c=-1$，

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)\,e^{-in\pi x/l}\,dx \tag{5}$$

參見 74 題。

6·5 傅氏級數的巴塞維恒等式

巴塞維恒等式（Parseval's identity）爲

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{F(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{6}$$

其中 a_n 及 b_n 均同(2)式。

一重要之結論爲

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx &= 0\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx &= 0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

此稱爲**里曼定理**（Riemann's theorem）。

6·6 有限傅氏變換

在 $0 < x < l$，$F(x)$ 的**有限傅氏正弦變換**（Finite Fourier sine transform）定義爲

$$f_s(n) = \int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{8}$$

其中 n 爲整數。函數 $F(x)$ 則稱爲 $f_s(n)$ 的**反有限傅氏正弦變換**（Inverse finite Fourier sine transform），且等於

$$F(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

在 $0 < x < l$，$F(x)$ 的**有限傅氏餘弦變換**（Finite Fourier cosine transform）定義爲

$$f_c(n) = \int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{10}$$

其中 n 爲整數。函數 $F(x)$ 則稱爲 $f_c(n)$ 的**反有限傅氏餘弦變換**（Inverse finite Fourier cosine transform），且等於

$$F(x) = \frac{1}{l}f_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

參見9～11題。

有限傅氏變換可用於解微分方程式（見32題）。

6-7 傅氏積分

若$F(x)$滿足下列條件

1. $F(x)$在任何有限區間$-l \leq x \leq l$滿足狄里西雷條件。
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\,dx$ 收斂，即$F(x)$在$-\infty < x < \infty$間絕對可積（Absolutely integrable）。

則**傅氏積分定理**（Fourier's integral theorem）爲

$$F(x) = \int_0^{\infty} \{A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\}\,d\lambda \tag{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos\lambda x\,dx \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin\lambda x\,dx \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

上式亦可寫成

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\,du\,d\lambda \tag{14}$$

(12)式對$F(x)$之所有連續點均成立。若x爲不連續點，則如同在傅氏級數中一般，我們必需以$\frac{1}{2}\{F(x+0)+F(x-0)\}$來代替$F(x)$。對傅氏級數而言，上述條件爲充分條件，但非必要條件。

(12)及(13)和傅氏級數的(1)，(2)式非常相似。(12)式右端有時稱爲$F(x)$的**傅氏積分展開**（Fourier integral expansion），或簡稱**傅氏積分**（Fourier integral）。

6-8 傅氏積分的複數形式

傅氏積分(12)及係數(13)可以複數表示爲

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\,d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,e^{-i\lambda u}\,du \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{i\lambda(x-u)}\, du\, d\lambda$$

參見77題。

6·9 傅立葉變換

由(15)式可知，若

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u)\, du \tag{16}$$

則

$$F(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} f(\lambda)\, d\lambda \tag{17}$$

以 x 代 u，即可得 $F(x)$。

函數 $f(\lambda)$ 稱爲 $F(x)$ 的**傅立葉變換**（Fourier transform，或簡稱**傅氏變換**），寫成 $f(\lambda)=F\{F(x)\}$。函數 $F(x)$ 稱爲 $f(\lambda)$ 的**反傅立葉變換**（Inverse Fourier transform，或簡稱反傅氏變換），寫成 $F(x)=F^{-1}\{f(\lambda)\}$。(17)式亦稱爲(16)式的**反變換公式**（Inversion formula）。

注意在積分符號前的常數，可爲任意常數之乘積，只要其積爲½π即可。若兩常數各爲 $1/\sqrt{2\pi}$，則我們可得到所謂的對稱形式（Symmetric form）。

6·10 傅立葉正弦及餘弦變換

在 $0<x<\infty$ 時，$F(x)$ 的（無限）**傅立葉正弦變換**（(Infinite) Fourier sine transform）之定義如下：

$$f_s(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u) \sin \lambda u\, du \tag{18}$$

函數 $F(x)$ 則稱爲 $f_s(\lambda)$ 的**反傅立葉正弦變換**（Inverse Fourier sine transform），如下：

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x\, d\lambda \tag{19}$$

在 $0<x<\infty$ 時，$F(x)$ 的（無限）**傅立葉餘弦變換**（(Infinite) Fourier cosine transform）之定義如下：

$$f_c(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u) \cos \lambda u\, du \tag{20}$$

函數 $F(x)$ 稱為 $f_c(\lambda)$ 的反傅立葉餘弦變換 (Inverse Fourier cosine transform)，如下

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_c(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda \tag{21}$$

參見 18～20 題。

傅氏變換亦可用於解微分方程式 (見 33 題)。

6-11 摺積定理

兩函數 $F(x)$ 及 $G(x)$ 之摺積 (Convolution) 定義如下 (其中 $-\infty < x < \infty$) :

$$F*G = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,G(x-u)\,du = H(x) \tag{22}$$

一重要結論，稱為**傅氏變換的摺積定理** (Convolution theorem for Fourier transforms)，如下 :

定理 6.1 : 若 $H(x)$ 為 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的摺積，則

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right\} \tag{23}$$

$$\mathcal{F}\{F*G\} = \mathcal{F}\{F\}\,\mathcal{F}\{G\} \tag{24}$$

即 F 和 G 之摺積的傅氏變換，等於 F 和 G 之傅氏變換的積。

6-12 傅氏積分中的巴塞維恒等式

若 $F(x)$ 的傅氏變換為 $f(\lambda)$，則

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\,d\lambda \tag{25}$$

此稱為傅氏積分中的巴塞維恒等式。此結論之推廣可參見 80 題。

6-13 傅氏變換和拉氏變換的關係

考慮函數

$$F(t) = \begin{cases} e^{-xt}\,\Phi(t) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \tag{26}$$

故由(16)式，並以 y 取代 λ，可得 $F(t)$ 的傅氏變換為

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t}\,\Phi(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,\Phi(t)\,dt \tag{27}$$

其中 $s=x+iy$。(27)式的右端為 $\phi(t)$ 的拉氏變換，故由此結論即可看出傅氏變換和拉氏變換的關係。由此亦可知可將 s 視為複數 $x+iy$。

若欲使兩者關係更明顯，見下述。若在 $t<0$ 時，$F(t)$ 及 $G(t)$ 均為零，則 F 和 G 的摺積，可由(22)式改寫為

$$F*G = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du \tag{28}$$

再由(24)式

$$\mathcal{L}\{F*G\} = \mathcal{L}\{F\}\,\mathcal{L}\{G\} \tag{29}$$

故和(11)式符合。

因對於傅立葉變換而言，存在對應於(16)式的反變換公式(17)，故使人猜想到對於拉氏變換，是否有反變換公式。此種反變換公式可參見第七章。

附解題

傅立葉級數

6.1 證明 $\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0$ 其中 $k=1,2,3,\cdots$

答 $\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = -\frac{l}{k\pi}\cos k\pi + \frac{l}{k\pi}\cos(-k\pi) = 0$

$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = \frac{l}{k\pi}\sin k\pi - \frac{l}{k\pi}\sin(-k\pi) = 0$

6.2 證明 (a) $\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ l & m=n \end{cases}$

(b) $\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$

其中 m、n 為 $1,2,3\cdots$ 中之任意值。

答 (a) 由三角恆等式 $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$, $\sin A\sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B)-$

$\cos(A+B)\}$

若 $m \neq n$，則由第 1 題得

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

同理若 $m \neq n$，則

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

若 $m=n$，則

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

若 $m=n=0$，則上式積分分別爲 $2l$ 及 0。

(b) 因 $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A-B)+\sin(A+B)\}$，故由第 1 題，若 $m \neq n$，則

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}+\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

若 $m=n$，則

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx = 0$$

若積分上下限由 $-l$，l 改爲 c，$c+2l$，則(a)(b)中的結論仍相同。

6.3 若級數 $A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ 在 $(-l, l)$ 中一致收斂至 $f(x)$，證明當 $n=1, 2, 3, \cdots$，時

(a) $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (b) $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (c) $A = \frac{a_0}{2}$

答 (a)

$$F(x) = A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

將上式乘上 $\cos\frac{m\pi x}{l}$ 並自 $-l$ 至 l 積分之，且利用第 2 題，得

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx &= A\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \\ &= a_m l \quad 其中\ m\neq 0\end{aligned} \tag{2}$$

故 $$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad 其中\ m = 1,2,3,\ldots$$

(b) 將(1)式乘上 $\sin\frac{m\pi x}{l}$ 並自 $-l$ 至 l 積分之，且利用第 2 題，得

$$\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = A\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \tag{3}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$
$$= b_m l$$

故 $$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad 其中\ m = 1,2,3,\ldots$$

(c) 將(1)式從 $-l$ 至 l 積分之，並利用第 1 題，得

$$\int_{-l}^{l} F(x)\,dx = 2Al \quad 即 \quad A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$$

令 $m=0$ 代入(a)之結論，得 $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$ 故 $A = \frac{a_0}{2}$

若積分範圍由 $-l$，l 改為 c，$c+2l$，則上述結論仍然不變。

因我們假設以上之級數在 $(-l, l)$ 間會一致收斂至 $F(x)$，故在以上的推導過程中 求和及積分號的前後對調均可行。若以上假設並未成立，則上面所得之係數 a_m 及 b_m，仍稱為相對 $F(x)$ 之傅立葉係數 (Fourier coefficient)，而以 a_m 及 b_m 為係數之級數，仍稱為相對 $F(x)$ 之傅立葉級數 (Fourier series)。在此種情況下，有一很重要的課題，即探討在何種條件下，此級數會確實收斂至 $F(x)$。收斂之充分條件為狄里西雷條件 (Dirichlet conditions)，以下將會提到 (見 12 ～ 17 題)。

6.4 (a) 求出相對於下列方程式的傅立葉係數。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \qquad 週期 = 10$$

(b) 寫出其傅氏級數。

(c) $F(x)$ 在 $x=-5$，$x=0$ 及 $x=5$ 應如何定義，才能使傅立葉級數在 $-5 \leq x \leq 5$ 間收斂至 $F(x)$？

答 $F(x)$ 之圖形如圖 6-4 所示。

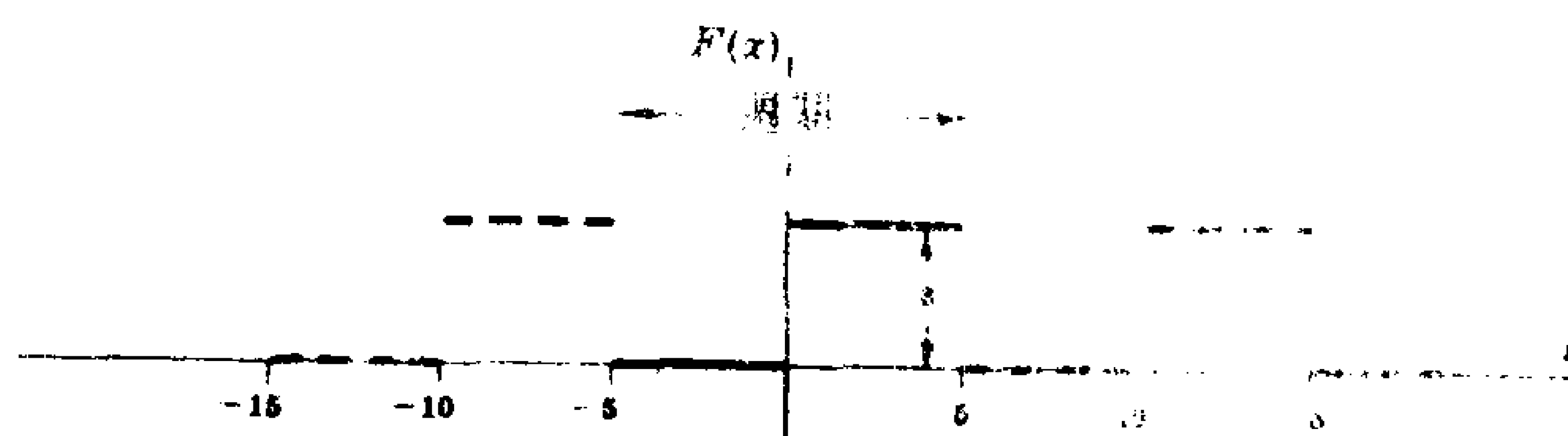


圖 6-4

(a) 週期 $=2l=10$ 且 $l=5$，取積分範圍 c 及 $c+2l$ 分別爲 -5 及 5，故 $c=-5$，則

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5 = 0 \quad \text{其中 } n\neq 0$$

若 $n=0$, $a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3.$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

(b) 對應之傅立葉級數爲

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

(c) 由於 $F(x)$ 滿足狄里西雷條件，故在所有連續點，級數收斂至 $F(x)$，而在所有不連續點，級數收斂至 $\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$。在不連續點 $x=-5$，0 及 5，級數收斂至 $(3+0)/2=3/2$，可由圖中看出。若我們將 $F(x)$ 重新定義如下：

$$F(x) = \begin{cases} 3/2 & x=-5 \\ 0 & -5<x<0 \\ 3/2 & x=0 \\ 3 & 0<x<5 \\ 3/2 & x=5 \end{cases} \qquad \text{週期} = 10$$

則此級數在 $-5 \leq x \leq 5$ 間均會收斂至 $F(x)$ 。

6.5 將 $F(x)=x^2$，$0<x<2\pi$ 展開成傅立葉級數，但(a)週期爲 2π (b)週期未指定。

解 (a) 週期爲 2π 的 $F(x)$ 圖形如圖 6-5 所示。

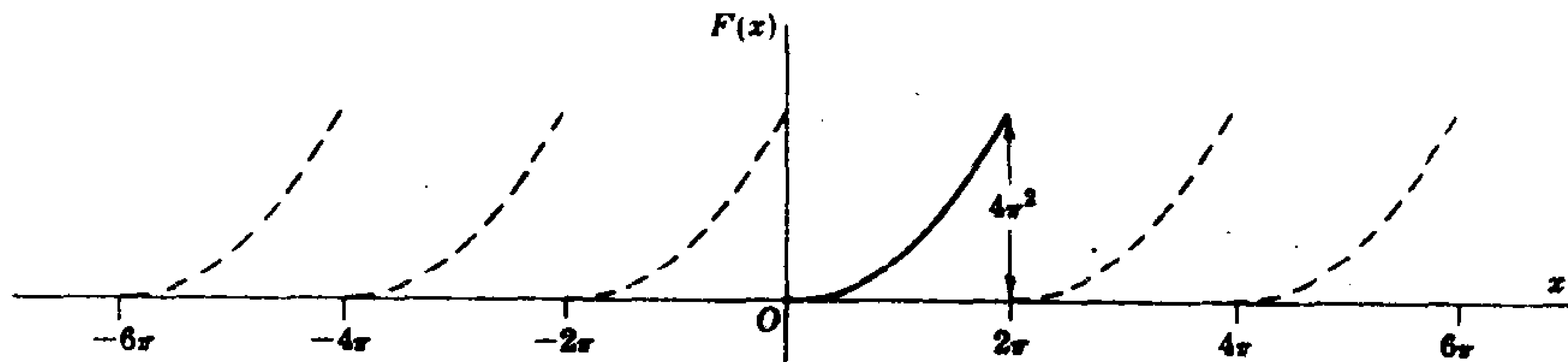


圖 6-5

週期 $=2l=2\pi$ 故 $l=\pi$，取 $c=0$，得

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, \quad n \neq 0$$

若 $n=0$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3}.$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

故 $$F(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

上式對 $0<x<2\pi$ 均有效。在 $x=0$ 及 $x=2\pi$ 時，上面級數收斂至 $2\pi^2$ 。

(b) 若週期未指定，則一般而言，無法唯一決定傅立葉級數。

奇函數及偶函數，半幅傅氏正弦及餘弦級數

6.6 若 $F(x)$ 爲偶，證明 (a) $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (b) $b_n = 0$

解 (a) $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$

令 $x=-u$，

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{l}\right)du = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du$$

由定義知偶函數滿足 $f(-u)=f(u)$，故

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

(b) $$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (1)$$

令 $x=-u$ 代入(1)式右端之第一積分式，得

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(-u)\sin\left(-\frac{n\pi u}{l}\right)du = -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(-u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du = -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

其中我們利用到偶函數的性質 $F(-u)=F(u)$，且在最後一步驟中，積分之虛擬變數（Dummy variable）u 可用任何其他符號代入，故以 x 取代 u。故由(1)式，並利用(2)式，我們可得

$$b_n = -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

6.7 將 $F(x)=x$，$0<x<2$ 展開成半幅之(a)正弦級數(b)餘弦級數。

解 (a) 將所給函數之定義，擴展成週期為 4 的奇函數，如圖 6-6 所示。此稱為 $F(x)$ 的奇擴展（Odd extension）。故 $2l=4$，$l=2$。

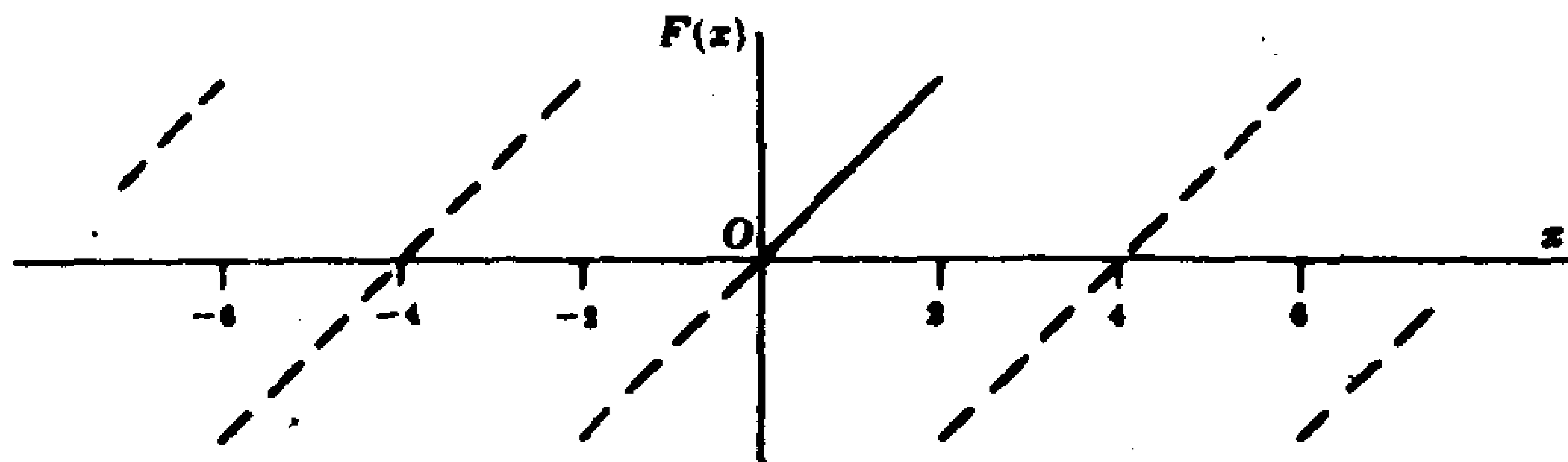


圖 6-6

因此 $a_n=0$ 且

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

故　$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

(b) 將 $F(x)$ 之定義擴展爲週期 4 的偶函數，如圖 6-7 所示。此稱爲 $F(x)$ 的偶擴展（Even extension），則 $2l=4$，$l=2$。

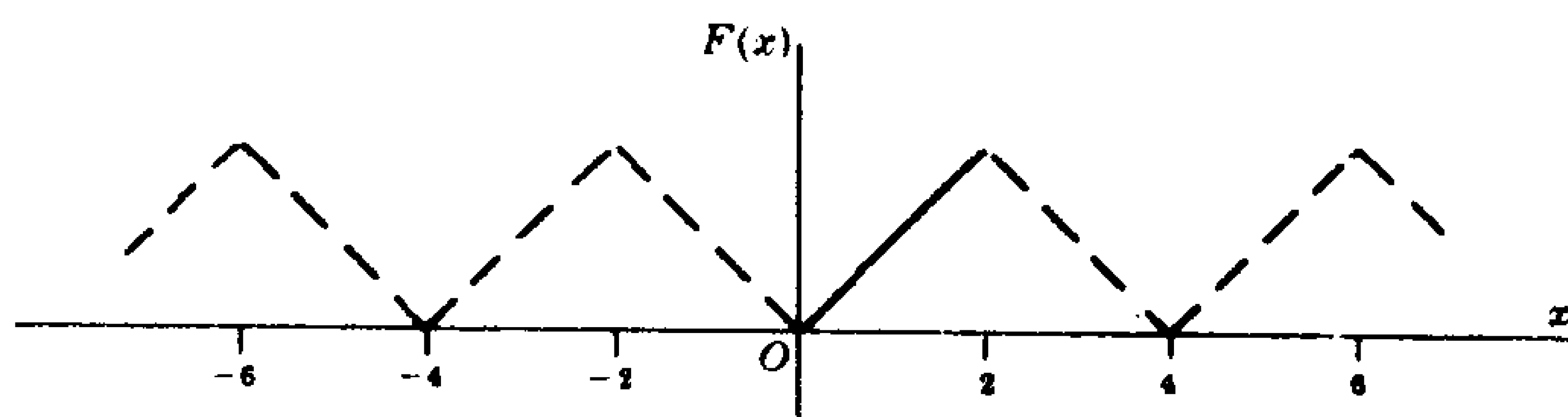


圖 6-7

故 $b_n=0$，

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad 其中\ n \neq 0$$

若 $n=0$，$a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2.$

故　$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

值得一提的是，所給方程式 $F(x)=x$，$0<x<2$，可同時表爲(a)(b)兩不同之級數，並別優劣之別。

傅立葉級數中的巴弗維恒等式

6.8　若相對於 $F(x)$ 之傅立葉級數，在 $(-l, l)$ 之間一致收斂至 $f(x)$，證明下列巴塞維恒等式

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \{F(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

但假設積分存在。

若 $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$，將上式乘上$F(x)$，並逐項自$-l$至$l$積分之（因此級數爲一致收斂，故可行此方法），得

$$\int_{-l}^{l}\{F(x)\}^2 dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right\}$$
$$= \frac{a_0^2}{2}l + l\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{1}$$

其中我們用到下列等式

$$\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = la_n, \quad \int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = lb_n, \quad \int_{-l}^{l} F(x)\,dx = la_0 \tag{2}$$

此均由傅立葉係數而得。

將(1)式兩端各除以l，即可得所求結果。事實上巴塞維恒等式成立之條件，少於我們在這裏所加諸的條件。

有限傅氏變換

6.9 推導本章中的(a)方程式(9)(b)方程式(11)。

答 (a) 若$F(x)$爲在$(-l, l)$間的奇函數，則

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

其中
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{2}$$

如果我們寫成

$$\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = f_s(n)$$

則 $b_n = \frac{2}{l}f_s(n)$ 且(1)可寫成所求的型式

$$F(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

亦可寫成 $F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{f_s(n)\}$

(b) 若$F(x)$在$(-l, l)$間爲偶函數，則

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{4}$$

其中
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \tag{5}$$

如果我們寫成

$$\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = f_c(n)$$

則 $a_0 = \frac{2}{l} f_c(0)$ 且(4)式可寫成所需之形式

$$F(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

亦可寫成 $F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{f_c(n)\}$

6.10 求函數 $F(x)=2x$，$0<x<2$ 之(a)有限傅氏正弦變換，及(b)有限傅氏餘弦變換。

圖 (a) 因 $l=4$，故

$$f_s(n) = \int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^4 2x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

$$= \left\{(2x)\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - (2)\left(\frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right\}\Bigg|_0^4 \doteq 32\left(\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\right)$$

(b) 若 $n>0$, $f_c(n) = \int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^4 2x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx$

$$= \left\{(2x)\left(\frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - (2)\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right\}\Bigg|_0^4 = 32\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

若 $n=0$，$f_c(n) = f_c(0) = \int_0^4 2x\,dx = 16$

6.11 由下列各式中求 $F(x)$: (a) $\mathcal{F}_s\{F(x)\} = 16(-1)^{n-1}/n^3$, $n = 1,2,3,\ldots$, 其中 $0<x<8$;(b) $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = \sin(n\pi/2)/2n$, $n=1,2,3,\ldots$ 若 $n=0$，則 $F_c\{F(x)\}=\pi/4$，其中 $0<x<2\pi$。

圖 (a) 由第9題中的(3)式，以 $l=8$ 代入得

$$F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\left\{\frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}\right\}$$

$$= \frac{2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{8} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{8}$$

(b) 由第9題(b)中的(6)式，且 $l=2\pi$，得

$$F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\left\{\frac{\sin(n\pi/2)}{2n}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$$

傅立葉級數的收斂性

6.12 證明 (a) $\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos Mt = \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$

(b) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{1}{2},\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{1}{2}.$

解 (a) 由於 $\cos nt\sin\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\{\sin(n+\frac{1}{2})t-\sin(n-\frac{1}{2})t\}.$

將 n 由 1 至 M 代入，並將各式相加，得

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}t\{\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos Mt\} &= (\sin\tfrac{3}{2}t-\sin\tfrac{1}{2}t)+(\sin\tfrac{5}{2}t-\sin\tfrac{3}{2}t)\\ &\quad+\cdots+\{\sin(M+\tfrac{1}{2})t-\sin(M-\tfrac{1}{2})t\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{\sin(M+\tfrac{1}{2})t-\sin\tfrac{1}{2}t\}\end{aligned}$$

除以 $\sin\frac{1}{2}t$，再加上 $\frac{1}{2}$，即得證。

(b) 將(a)之等式分別自 $-\pi$ 至 0 及自 0 至 π 積分之。因所有含餘弦的積分均爲零，故可得所給之答案。

6.13 證明 $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx = 0$ 其中 $F(x)$ 爲分段連續。

解 由第 8 題（其中 $l=\pi$）可立刻看出上述等式，因欲使 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 爲收斂，則 $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}b_n = 0$

此結論常稱爲里曼定理（Riemann's theorem）。

6.14 證明 $\lim_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin(M+\frac{1}{2})x\,dx = 0$ 其中 $F(x)$ 爲分段連續。

解 因

$$\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin(M+\tfrac{1}{2})x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\{F(x)\sin\tfrac{1}{2}x\}\cos Mx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\{F(x)\cos\tfrac{1}{2}x\}\sin Mx\,dx$$

利用 13 題的結論，並分別以 $F(x)\sin\frac{1}{2}x$ 及 $F(x)\cos\frac{1}{2}x$ 替代 $F(x)$，即可得所求之結果（只要 $F(x)$ 爲分段連續，則 $F(x)\sin\frac{1}{2}x$ 及 $F(x)\cos\frac{1}{2}x$ 均爲分段連續）。

若積分上下限由 $-\pi$，π 改爲 a，b，則上面之結論仍然成立。

6.15 假設 $l=\pi$，即對應於 $F(x)$ 的傅氏級數之週期爲 $2l=2\pi$，證明

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

答 利用傅立葉係數公式，其中 $l=\pi$，得

$$\begin{aligned}
a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\cos nu\,du\right)\cos nx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\sin nu\,du\right)\sin nx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)(\cos nu \cos nx + \sin nu \sin nx)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\cos n(u-x)\,du
\end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\,du$$

$$\begin{aligned}
S_M(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\,du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\cos n(u-x)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{M}\cos n(u-x)\right\}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du
\end{aligned}$$

利用12題，並令 $u-x=t$，得

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

因被積函數的週期爲 2π，我們可用其他長度爲 2π 的區間來取代 $(-\pi-x, \pi-x)$，例如 $-\pi$ 至 π，由此我們可得所求結果。

6.16 證明

$$S_M(x) - \left(\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{F(t+x)-F(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\sin(M+\tfrac{1}{2})t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\sin(M+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

答 由12題，

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \quad (1)$$

將12題(b)的積分式分別乘上 $F(x-0)$ 及 $F(x+0)$，得

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} F(x-0)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x+0)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (2)$$

將(1)式減(2)式，即可得證。

6.17 若$F(x)$及$F'(x)$在$(-\pi,\pi)$間爲分段連續，證明

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

圏 因$F(x)$爲分段連續，故函數 $\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 在$0<t\leq\pi$亦爲分段連續。

又，

$$\lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{t}$$

因$F'(x)$爲分段連續，故在每一點x，其$F(x)$的右端點導式存在，即上式極限值存在。

故 $\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 在$0\leq t\leq\pi$爲分段連續。

同理，$\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 在$-\pi\leq t\leq 0$亦爲分段連續。

故由14及16題，可得

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) - \left\{\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}\right\} = 0 \quad 即 \quad \lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

傅立葉積分及傅立葉變換

6.18 (a) 求下列函數的傅氏變換 $F(x) = \begin{cases} 1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$

(b) 當$a=1$時，畫出$F(x)$及其傅氏變換。

圏 (a) $F(x)$的傅氏變換爲

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,e^{-i\lambda u}\,du = \int_{-a}^{a}(1)\,e^{-i\lambda u}\,du = \left.\frac{e^{-i\lambda u}}{-i\lambda}\right|_{-a}^{a}$$

$$= \left(\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}\right) = 2\frac{\sin\lambda a}{\lambda}, \qquad \lambda\neq 0$$

代入 $\lambda=0$，得 $f(\lambda)=2a$。

(b) $a=1$ 時，$F(x)$ 及 $f(\lambda)$ 的圖形如圖 6-8 及 6-9 所示。

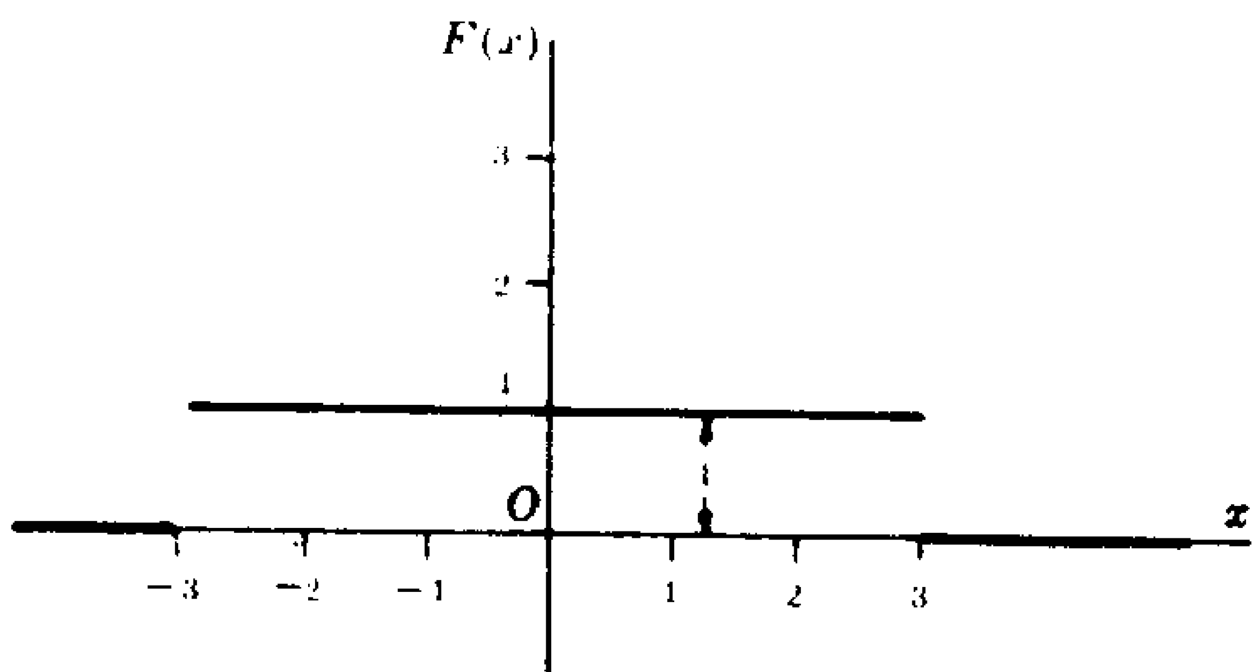


圖 6-8

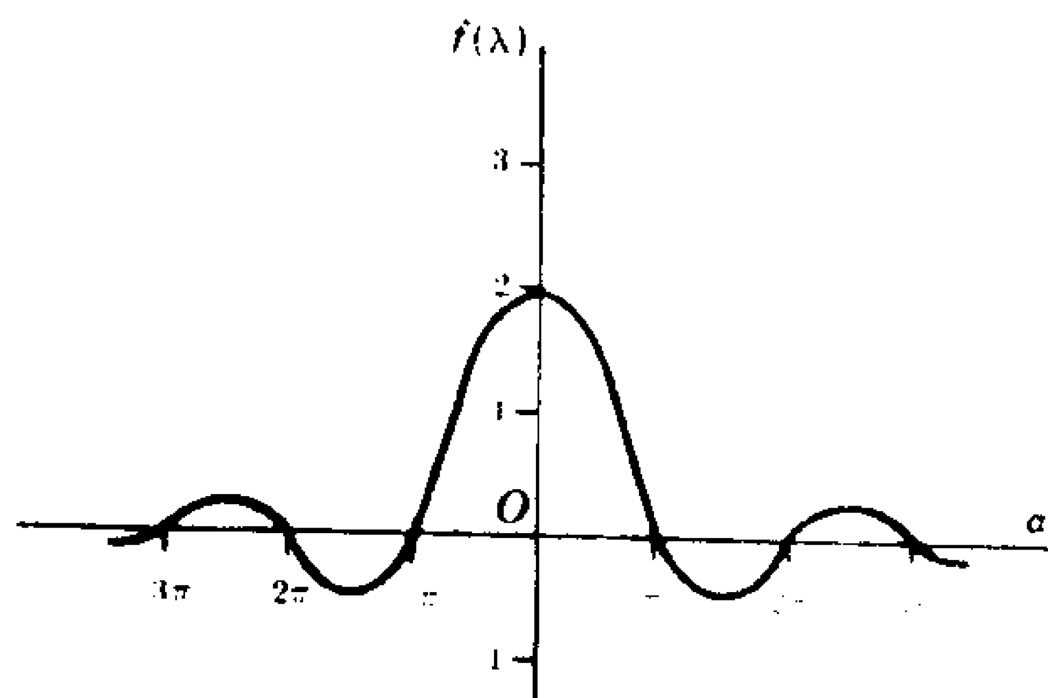


圖 6-9

6.19 (a) 利用 18 題之結論，計算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda a\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda$

(b) 推導下式之值 $\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$

解 (a) 由傅立葉積分定理，若

$$f(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{-i\lambda u}\,du \qquad \text{則，} \qquad F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

再由 18 題，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\frac{\sin\lambda a}{\lambda}e^{i\lambda x}\,d\alpha = \begin{cases}1 & |x|<a\\ 1/2 & |x|=a\\ 0 & |x|>a\end{cases} \qquad (1)$$

(1)式的左端爲

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda a\cos\lambda x}{\lambda}\,d\alpha+\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda a\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda \qquad (2)$$

(2)式第二積分式中，其被積函數爲奇函數，故積分值爲零，由(1)及(2)，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda a\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda = \begin{cases}\pi & |x|<a\\ \pi/2 & |x|=a\\ 0 & |x|>a\end{cases} \qquad (3)$$

(b) 在(a)中，若 $x=0$，$a=1$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\pi \qquad \text{即} \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}$$

（因被積函數爲偶函數）。

6.20 若 $F(x)$ 爲偶函數，證明：

(a) $f(\lambda) = 2\int_0^\infty F(u)\cos\lambda u\,du$, (b) $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda$.

圖 由定義

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-i\lambda u} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda u\,du - i\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\sin\lambda u\,du \qquad (1)$$

(a) 因$F(u)$爲偶，故$F(u)\cos\lambda u$爲偶，$F(u)\sin\lambda u$爲奇，故(1)式右端之第二積分式爲零，由此可得

$$f(\lambda) = 2\int_0^\infty F(u)\cos\lambda u\,du \quad ,$$

(b) 由(a)，$f(-\lambda)=f(\lambda)$，故$f(\lambda)$爲偶函數，利用類似(a)的證法，即可得證。

若本題改爲奇函數，則亦可得類似之結果，可由正弦取代餘弦而得。

傅立葉積分式中的巴塞維恒等式

6.21 試證 18 題傅氏變換中，傅立葉積分的巴塞維恒等式。

圖 欲證下式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(\lambda)\}^2\,d\lambda$$

其中 $F(x) = \begin{cases}1 & |x|<a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ 及 $f(\lambda) = 2\frac{\sin\lambda a}{\lambda}$

亦即要證明下式

$$\int_{-a}^{a}(1)^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\lambda = 2\int_0^\infty\frac{\sin^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\lambda = \pi a$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2\lambda a}{\lambda^2}\,d\alpha = \frac{\pi a}{2}$$

令$\lambda a = u$代入第111題。即可得知此等式成立。亦可直接計算 $\int_0^\infty\frac{\sin^2 u}{u^2}$ 而得。

傅立葉積分定理的證明

6.22 利用傅立葉級數的極限形式，啓發式地證明傅立葉積分定理。

解 令

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

其中 $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du$ 及 $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du$

將 a_n，b_n 代回(1)式（見 15 題），得

$$F(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(u)\,du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} F(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-x)\,du \tag{2}$$

若假設 $\int_{-\infty}^{\infty}|F(u)|\,du$ 收斂，則在 $l\to\infty$ 時，(2)式右端第一項趨近於零，而其他項近於

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\frac{n\pi}{l}(u-x)\,du \tag{3}$$

最後一步驟並不很嚴密，使得此證明被稱爲啓發式的（Heuristic）

令 $\Delta\lambda = \pi/l$，(3)可改寫爲

$$F(x) = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda\, F(n\,\Delta\lambda) \tag{4}$$

其中

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(u-x)\,du \tag{5}$$

但(4)式之極限等於

$$F(x) = \int_{0}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(u-x)\,du$$

此即爲傅立葉積分公式。

以上證明只提供一個可能的推論。若要更嚴密，可由下式著手

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(u-x)\,dx$$

並檢查其收斂性。此法可參見 23 ～ 26 題。

6.23 證明：(a) $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{l}\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}$，(b) $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-l}^{0}\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}$

解 (a) 令 $\lambda v = y$，則 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{l}\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\lambda l}\frac{\sin y}{y}dy = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy = \frac{\pi}{2}$

(由第5章第43題)

(b) 令 $\lambda v = -y$，則 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-l}^{0}\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\lambda l}\frac{\sin y}{y}dy = \frac{\pi}{2}$

6.24 若$G(x)$在(a, b)間爲分段連續，則由里曼定理得知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{a}^{b}G(x)\sin\lambda x\,dx = 0$$

對於餘弦函數亦有類似結果(見81題)。利用上式證明

$$(a)\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{l}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}F(x+0)$$

$$(b)\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-l}^{0}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}F(x-0)$$

其中假設$F(x)$及$F'(x)$分別在$(0, l)$及$(-l, 0)$中爲分段連續。

answer (a) 利用23題(a)，可知上式之證明相當於要證明下式

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{l}\{F(x+v)-F(x+0)\}\frac{\sin\lambda v}{v}dv = 0$$

因 $\lim_{v\to 0+}F(v)$ 存在，且$f(x)$爲分段連續，故 $G(v) = \frac{F(x+v)-F(x+0)}{v}$ 亦爲分段連續，由此立刻可知上式成立(由里曼定理)。

(b) 利用23題(b)及類似(a)部份之證明，可得證。

6.25 若$F(x)$滿足 $\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|dx$ 收斂，證明

$$(a)\ \lim_{\alpha\to\infty}\int_{0}^{\infty}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}F(x+0),\quad (b)\ \lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{0}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}F(x-0).$$

answer 由下式

$$\int_{0}^{\infty}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \int_{0}^{l}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv + \int_{l}^{\infty}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv \tag{1}$$

$$\int_{0}^{\infty}F(x+0)\frac{\sin\lambda v}{v}dv = \int_{0}^{l}F(x+0)\frac{\sin\lambda v}{v}dv + \int_{l}^{\infty}F(x+0)\frac{\sin\lambda v}{v}dv \tag{2}$$

相減得，

$$\int_{0}^{\infty}\{F(x+v)-F(x+0)\}\frac{\sin\lambda v}{v}dv \tag{3}$$

$$= \int_{0}^{l}\{F(x+v)-f(x+0)\}\frac{\sin\lambda v}{v}dv + \int_{l}^{\infty}F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v}dv - \int_{l}^{\infty}F(x+0)\frac{\sin\lambda v}{v}dv$$

將(3)式中的積分式分別記為 I，I_1，I_2 及 I_3，則 $I = I_1 + I_2 + I_3$，故

$$|I| \leqq |I_1| + |I_2| + |I_3| \tag{4}$$

但

$$|I_2| \leqq \int_l^\infty \left| F(x+v)\frac{\sin\lambda v}{v} \right| dv \leqq \frac{1}{l}\int_l^\infty |F(x+v)|\, dv$$

又

$$|I_3| \leqq |F(x+0)| \left| \int_l^\infty \frac{\sin\lambda v}{v}\, dv \right|$$

因 $\int_0^\infty |F(x)|\, dx$ 和 $\int_0^\infty \frac{\sin\lambda v}{v}\, dv$ 均收斂，我們可選取夠大的 l，使得 $|I_2| \leq \epsilon/3$，$|I_3| \leq \epsilon/3$，又我們亦可選取夠大的 λ，使得 $|I_1| \leq \epsilon/3$，再由(4)式，當 λ 及 l 均夠大時，會使得 $|I| < \epsilon$，由此可得所求結果。

(b)之證明和(a)完全相同。

6.26 證明傅立葉積分公式，其中 $F(x)$ 滿足 6.1 中的條件。

解 我們須證明 $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{l}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\, du\, d\lambda = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$

因 $\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\, du\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|\, du$，而 $\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|\, du$ 收斂，故由積分式的瓦士曲士測試（Weierstrass test），可知對所有 λ 值，$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\, du$ 為絕對且一致收斂。因此我們可調動積分次序，得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{l} d\lambda \int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\, du &= \frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\, du \int_{\lambda=0}^{l} \cos\lambda(x-u)\, du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\frac{\sin l(u-x)}{u-x}\, du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} F(x+v)\frac{\sin lv}{v}\, dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} F(x+v)\frac{\sin lv}{v}\, dv + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(x+v)\frac{\sin lv}{v}\, dv
\end{aligned}$$

其中用到 $u = x + v$。

令 $l \to \infty$，由 24 題可知所給之積分式，將收斂至 $\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$ 故得證。

其他各類問題

6.27 將 $F(x) = \sin x$，$0 < x < \pi$，展開成傅氏餘弦級數。

解 只含餘弦項的傅氏級數，其原函數必爲偶函數，故我們將$F(x)$的定義擴展（見圖6-10的虛線），使其成爲偶函數。經過此擴展之後，$F(x)$可視爲定義在長度爲2π的區間。取其週期爲2π，可得$2l=2\pi$，即$l=\pi$。

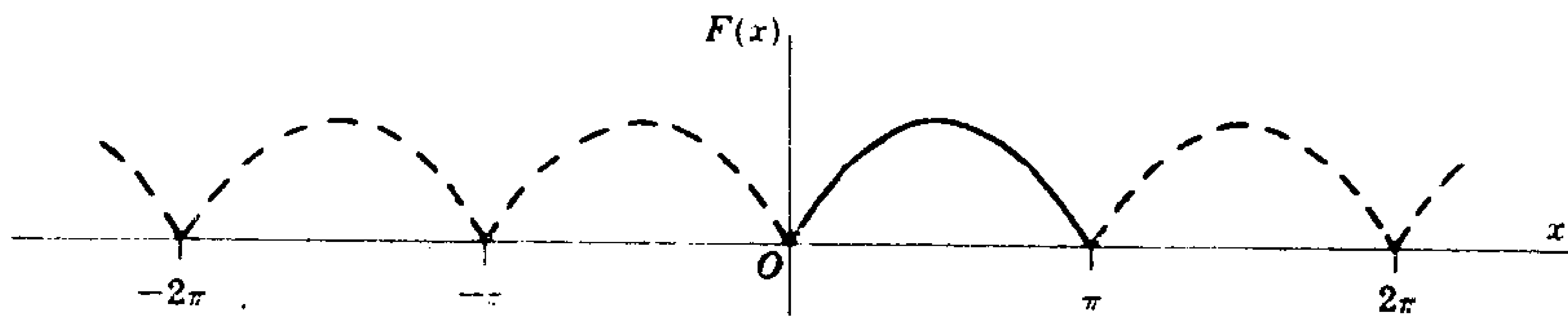


圖 6-10

由第6題，$b_n=0$ 且

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\}\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \quad \text{其中 } n\neq 1.$$

若 $n=1$, $\quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^\pi = 0.$

若 $n=0$, $\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$

故

$$F(x) = \frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$$

$$= \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}+\frac{\cos 6x}{6^2-1}+\cdots\right)$$

6.28 證明 $\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x},\quad x\geqq 0$

解 令$F(x)=e^{-x}$代入傅立葉積分定理

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\,d\lambda\int_0^\infty F(u)\cos\lambda u\,du$$

即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\,d\lambda\int_0^\infty e^{-u}\cos\lambda u\,du = e^{-x}$$

但 $\int_0^\infty e^{-u}\cos\lambda u\,du = \frac{1}{\lambda^2+1}$. 故

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = e^{-x} \qquad \text{即} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

6.29 解積分方程式 $\int_0^\infty F(x)\cos\lambda x\,dx = \begin{cases}1-\lambda & 0\leqq\lambda\leqq 1\\ 0 & \lambda>1\end{cases}$

解 令 $\int_0^\infty F(x)\cos\lambda x\,dx = f(\lambda)$ 並取 $f(\lambda)=\begin{cases}1-\lambda & 0\leqq\lambda\leqq 1\\ 0 & \lambda>1\end{cases}$，故由傅立葉積分定理，可得

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$$

6.30 求 $\partial U/\partial x$（其中 U 爲 x，t 的函數，且 $0<x<l$，$t>0$）的(a)有限傅立葉正弦變換(b)有限傅立葉餘弦變換。

解 (a) 由定義 $\partial U/\partial x$ 的有限傅立葉正弦變換爲（利用部分積分）

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

即
$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\{U\}$$

(b) 有限傅立葉餘弦變換爲

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

即
$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\{U\} - \{U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\}$$

6.31 對於 $\partial^2U/\partial x^2$，重做 30 題(a)及(b)。

解 在 30 題的結論中，以 $\partial U/\partial x$ 取代 U，可得

(a)
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right\} &= -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}\\ &= \frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_s\{U\} + \frac{n\pi}{l}\{U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right\} &= -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} - \{U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\}\\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_c\{U\} - \{U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\}\end{aligned}$$

其中 U_x 代表對 x 的偏導式。

6.32 利用有限傅氏變換，解

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad U(0,t)=0,\ U(4,t)=0,\ U(x,0)=2x$$

其中 $0<x<4$ ，$t>0$ 。

解 對偏微分方程式的兩端各取有限傅氏正弦變換（其中 $l=4$ ），得

$$\int_0^4 \frac{\partial U}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = \int_0^4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

令 $u=F_s\{U\}$ 利用 31 題(a)，並代入已知條件 $U(0,t)=0$，$U(4,t)=0$，得

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u \tag{1}$$

其中 $u=u(n,t)$ 。

取已知條件 $U(x,0)=2x$ 的傅氏正弦變換，可得（如同第 10 題(a)）

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{2x\} = \frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi} \tag{2}$$

解(1)之微分方程式，可得（ c 為任意常數）

$$u = u(n,t) = c\,e^{-n^2\pi^2 t/16} \tag{3}$$

因 $c=u(n,0)$ ，故由(2)及(3)

$$u = \frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

再由第 9 題(a)，反傅氏正弦變換為

$$U(x,t) = \frac{2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

$$= \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

物理上，$U(x,t)$ 代表一物質在任意點 x 及任意時間 t 的溫度，而此物質被侷限於兩平面 $x=0$ 及 $x=4$ 之間。已知條件 $U(0,t)=0$ 及 $U(4,t)=0$ 表示在端點（兩平面）之溫度為零，而 $U(x,0)=2x$ 表示最初溫度值為 x 的函數。此物質可換成在 x 軸上的圓棒，其端點為 $x=0$ 及 $x=4$ ，且其表面是絕熱的。

6.33 解 $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ x>0,\ t>0$ ，已知條件為

$$U(0,t) = 0, \qquad U(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}, \qquad U(x,t) \text{ 為有界}$$

答　將所給之偏微分方程式兩端各取傅氏正弦變換，得

$$\int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t} \sin \lambda x \, dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \lambda x \, dx \tag{1}$$

若
$$u = u(\lambda, t) = \int_0^\infty U(x,t) \sin \lambda x \, dx$$

則
$$\frac{du}{dt} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \sin \lambda x - \lambda U \cos \lambda x \right\} \Bigg|_0^\infty - \lambda^2 \int_0^\infty U \sin \lambda x \, dx$$

$$= \lambda U(0,t) - \lambda^2 u \tag{2}$$

將(1)式右端部分積分，並假設當 $x \to \infty$ 時，U 及 $\partial U / \partial x$ 均趨近於零。

由 $U(x, 0)$ 的已知定義，取傅氏正弦變換，可得

$$u(\lambda, 0) = \int_0^\infty U(x,0) \sin \lambda x \, dx$$

$$= \int_0^1 \sin \lambda x \, dx = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} \tag{3}$$

利用(3)式及 $U(0, t) = 0$ 來解(3)式，可得

$$u(\lambda, t) = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 t}$$

再取反傅氏正弦變換，可得所求之解

$$U(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t} \, d\lambda$$

物理上，這可用於表示在某物質 $x > 0$ 中的溫度（見32題）。

補充題

傅氏級數，奇函數及偶函數，傅氏正弦及餘弦級數

6.34 畫出下列各函數之圖形，並求出其傅立葉級數（可用到奇函數或偶函數的性質）：

(a) $F(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$　週期 4

(b) $F(x) = \begin{cases} -x & -4 \leqq x \leqq 0 \\ x & 0 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$　週期 8

(c) $F(x) = 4x, \ 0 < x < 10,$　週期 10

(d) $F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$　週期 6

答 (a) $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$ (c) $20-\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$

(b) $2-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$ (d) $\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}-\frac{6\cos n\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}$

6.35 在 34 題中，找出$F(x)$的不連續點，並說明其傅氏級數在這些不連續點將會收斂至何值。

答 (a) $x=0,\pm 2,\pm 4,\ldots;\ 0$ (c) $x=0,\pm 10,\pm 20,\ldots;\ 20$

(b) 沒有不連續點。 (d) $x=\pm 3,\pm 9,\pm 15,\ldots;\ 3$

6.36 將 $F(x)=\begin{cases}2-x & 0<x<4\\ x-6 & 4<x<8\end{cases}$ 展開成週期爲 8 的傅氏級數。

答 $\frac{16}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{4}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{4}+\cdots\right\}$

6.37 (a) 將$F(x)=\cos x$，$0<x<\pi$ 展開成傅氏正弦級數。

(b) $F(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 應如何定義，才可使級數在 $0\leq x\leq\pi$ 間收斂至$F(x)$？

答 (a) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$ (b) $F(0)=F(\pi)=0$

6.38 (a)將$F(x)=\cos x$，$0<x<\pi$ 展開成傅氏級數，其中週期爲π，(b)和 37 題比較，解釋兩者之相同和不同點。

答 答案和37題完全相同。

6.39 將 $F(x)=\begin{cases}x & 0<x<4\\ 8-x & 4<x<8\end{cases}$ 展開成(a)正弦級數(b)餘弦級數。

答 (a) $\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{8}$ (b) $\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos n\pi/2-\cos n\pi-1}{n^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{8}$

6.40 證明當 $0\leq x\leq\pi$ 時，

(a) $x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\cdots\right)$

(b) $x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right)$

6.41 利用40題，證明

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$

6.42 證明 $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{11^3}-\cdots=\frac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$

傅氏級數中的巴塞維恒等式

6.43 利用40題及巴塞維恒等式，證明 (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$，(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

6.44 證明 $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\cdots=\frac{\pi^2-8}{16}$ [提示：利用27題]

6.45 證明 (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$，(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$

6.46 證明 $\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\cdots=\frac{4\pi^2-39}{16}$

有限傅氏變換

6.47 求$F(x)=1$，$0<x<l$的(a)有限傅氏正弦變換(b)有限傅氏餘弦變換。

答 (a) $l(1-\cos n\pi)/n\pi$ (b) 0，$n=1,2,3,\ldots$；l，$n=0$

6.48 求$F(x)=x^2$，$0<x<l$的(a)有限傅氏正弦變換(b)有限傅氏餘弦變換。

答 (a) $\frac{2l^3}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)-\frac{l^3}{n\pi}\cos n\pi$ 其中 $n=1,2,3,\ldots$；$\frac{l^3}{3}$ 其中 $n=0$ (b) $\frac{2l^3}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$

6.49 若 $\mathcal{F}_s\{F(x)\}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}$ 其中$0<x<\pi$，求$F(x)$。

答 $\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\right)\sin nx$

6.50 若$\mathcal{F}_c\{F(x)\}=\frac{6(\sin n\pi/2-\cos n\pi)}{(2n+1)\pi}$其中$n=1,2,3,\cdots$，$n=0$時，$F_c\{F(x)\}=2/\pi$，且$0<x<4$。求$F(x)$。

答 $\frac{1}{2\pi}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\pi/2-\cos n\pi}{2n+1}\right)\cos\frac{n\pi}{4}$

6.51 若 $f(n)=\frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}$，求 (a) $\mathcal{F}_s^{-1}\{f(n)\}$ 及 (b) $\mathcal{F}_c^{-1}\{f(n)\}$ 但$0<x<1$。

答 (a) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}\sin n\pi x$ (b) $1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}\cos n\pi x$

傅氏積分及傅氏變換

6.52 (a) 求下式之傅氏變換 $F(x)=\begin{cases}1/2\epsilon & |x|\leq\epsilon\\ 0 & |x|>\epsilon\end{cases}$

(b) 當 $\epsilon \to 0+$ 時，求傅氏變換之極限，並討論其結果。

答 (a) $\frac{\sin \lambda\epsilon}{\lambda\epsilon}$, (b) 1

6.53 (a) 求下式之傅氏變換 $F(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

(b) 計算 $\int_0^\infty \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^3}\right) \cos \frac{x}{2}\, dx$

答 (a) $4\left(\frac{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda}{\lambda^3}\right)$, (b) $\frac{3\pi}{16}$

6.54 若 $F(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}$ 求 $F(x)$ 之(a)傅氏正弦變換(b)傅氏餘弦變換。畫出 $F(x)$ 及其變換式之圖形。 答 (a) $\frac{1 - \cos \lambda}{\lambda}$, (b) $\frac{\sin \lambda}{\lambda}$

6.55 (a) 求 e^{-x}，$x \geq 0$ 之傅氏正弦變換。

(b) 利用(a)之答案，證明 $\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-m},\ m > 0$

(c) 由傅立葉積分定理的觀點來看，解釋爲何(b)之結果不適用於 $m = 0$。

答 (a) $\lambda/(1 + \lambda^2)$

6.56 由下列積分方程式中，解 $Y(x)$

$$\int_0^\infty Y(x) \sin xt\, dx = \begin{cases} 1 & 0 \leqq t < 1 \\ 2 & 1 \leqq t < 2 \\ 0 & t \geqq 2 \end{cases}$$

並將所得答案代入驗證。 答 $Y(x) = (2 + 2\cos x - 4\cos 2x)/\pi x$

傅氏積分中的巴塞維恒等式

6.57 利用巴塞維恒等式，計算 (a) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$, (b) $\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 1)^2}$

[提示：利用 e^{-x}，$x > 0$ 的傅氏正弦及餘弦變換] 答 (a) $\pi/4$, (b) $\pi/4$

6.58 利用54題證明 (a) $\int_0^\infty \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$, (b) $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$

6.59 證明 $\int_0^\infty \frac{(x \cos x - \sin x)^2}{x^6}\, dx = \frac{\pi}{15}$

其他各類問題

6.60 若 $-\pi < x < \pi$ 且 $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，證明

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 - a^2} - \cdots$$

6.61 若 $-\pi < x < \pi$，證明

(a) $$\frac{\pi}{2}\frac{\sinh ax}{\sinh a\pi} = \frac{\sin x}{a^2 + 1^2} - \frac{2\sin 2x}{a^2 + 2^2} + \frac{3\sin 3x}{a^2 + 3^2} - \cdots$$

(b) $$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh ax}{\sinh a\pi} = \frac{1}{2a} - \frac{a\cos x}{a^2 + 1^2} + \frac{a\cos 2x}{a^2 + 2^2} - \cdots$$

6.62 (a) 若 $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，證明

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots$$

(b) 若 $0 < \alpha < 1$，證明

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{1+x}dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \cdots$$

(c) 利用(a)，(b)，證明 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$

[提示：在(a)中，將 $F(x) = \cos \alpha x,\ -\pi \leqq x \leqq \pi$ 展開成傅氏級數，在(b)中，將原積分式寫成 0 至 1，及由 1 至∞的積分式之和，並令 $x = 1/y$ 代入第二積分式，再利用 $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$.]

6.63 若 $0 < x < \pi$ 證明 $\mathcal{F}_s^{-1}\left\{\dfrac{1-\cos n\pi}{n^3}\right\} = \frac{1}{2}x(\pi - x)$

6.64 求 (a) $\mathcal{F}_s\{\partial^3 U/\partial x^3\}$ 及 (b) $\mathcal{F}_c\{\partial^3 U/\partial x^3\}$

6.65 證明

(a) $$\mathcal{F}_s\{Y^{(iv)}(x)\} = \frac{n^4\pi^4}{l^4}\mathcal{F}_s\{Y(x)\} - \frac{n^3\pi^3}{l^3}\{Y(0) + (-1)^{n+1}Y(l)\} + \frac{n\pi}{l}\{Y''(0) + (-1)^{n+1}Y''(l)\}$$

(b) $$\mathcal{F}_c\{Y^{(iv)}(x)\} = \frac{n^4\pi^4}{l^4}\mathcal{F}_c\{Y(x)\} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\{Y'(0) + (-1)^{n+1}Y'(l)\} - \{Y'''(0) + (-1)^{n+1}Y'''(l)\}.$$

6.66 (a) 利用有限傅氏變換，解

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 4,\ t > 0$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(4,t) = 0, \quad U(x,0) = 3\sin \pi x - 2\sin 5\pi x$$

(b) 此問題及解答之可能的物理意義爲何？

答 (a) $U(x,t) = 3e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x - 2e^{-50\pi^2 t}\sin 5\pi x$

6.67 解 $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $0 < x < 6,\ t > 0$ ，已知條件爲

$$U(0,t) = 0, \qquad U(6,t) = 0, \qquad U(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 3 \\ 0 & 3 < x < 6 \end{cases}$$

並解釋其物理意義。

答 $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left\{\frac{1-\cos(n\pi/3)}{n\pi}\right\} e^{-n^2\pi^2 t/36}\sin\frac{n\pi x}{6}$

6.68 (a) 解下列問題時

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 6,\ t > 0$$

$$U_x(0,t) = 0, \qquad U_x(6,t) = 0, \qquad U(x,0) = 2x$$

你覺得那種變換（正弦或餘弦）較好用？試解釋之。

(b) 求(a)中方程式的解。

答 (b) $6 + \frac{24}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right) e^{-n^2\pi^2 t/36}\cos\frac{n\pi x}{6}$

6.69 一柔軟之繩子長度爲 π ，拉緊後固定於 $x=0$ 和 $x=\pi$ 。當其開始發生小幅度的上下振動時，在任意點 x 及時間 t ，其離開 x 軸之位移爲 $Y(x,t)$ 滿足 $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ，其中 $a^2 = T/\rho$ ，T 爲張力，ρ 爲單位長度之質量。

(a) 利用有限傅氏變換，求此方程式（或稱波動方程式，Wave equation）之解，其中 $a^2=4$ ，且已知 $Y(0,t)=0,\ Y(\pi,t)=0,\ Y(x,0)=0.1\sin x + 0.01\sin 4x$ ，而在 $0<x<\pi$ ， $t>0$ 時，$Y_t(x,0)=0$。

(b) 解釋(a)中方程式之解及邊界條件的物理意義。

答 (a) $Y(x,t) = 0.1\sin x\cos 2t + 0.01\sin 4x\cos 8t$

6.70 (a)解邊界問題 $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ 已知條件爲 $Y(0,t)=0,\ Y(2,t)=0,\ Y(x,0)=0.05x(2-x)$, $Y_t(x,0)=0$, 其中 $0<x<2,\ t>0$ (b)解釋其物理意義。

答 (a) $Y(x,t) = \frac{1.6}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

6.71 解邊界問題 $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t)=1,\ U(\pi,t)=3,\ U(x,0)=2$ 其中 $0<x<\pi,\ t>0$

答 $U(x,t) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi}{n\pi}e^{-n^2 t}\sin nx$

6.72 試說明 71 題的物理意義。

6.73 解 70 題，但其中邊界條件 $Y(x, 0)$ 及 $Y_t(x, 0)$ 互換，即 $Y(x, 0) = 0$，$Y_t(x, 0) = 0.05x(2-x)$，並說明其物理意義。

答 $Y(x,t) = \frac{3.2}{3\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\sin\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

6.74 證明(4)及(5)式。

6.75 驗證下列函數之摺積定理，$F(x) = G(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

6.76 利用(4)及(5)，寫出複數形式的巴塞維恒等式。

6.77 證明(15)式。

6.78 證明(19)及(21)式。

6.79 證明(23)或(24)式。

[提示：若 $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u)\, du$ 且 $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda v} G(v)\, dv$ 則

$$f(\lambda)\, g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$

令 $u + v = x$ 代入]

6.80 若 $f(\lambda)$ 及 $g(\lambda)$ 分別是 $F(x)$ 及 $G(x)$ 的傅氏變換，證明

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \overline{G(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \overline{g(\lambda)}\, d\alpha$$

其中橫線代表共軛複數。

6.81 證明里曼定理（見 24 題）。

6.82 (a) 說明如何利用傅氏變換去解

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad x > 0$$

其中 $U(0,t) = 0$, $U(x,0) = e^{-x}$，且 $U(x, t)$ 爲有界。

(b) 說明其物理意義。

答 $U(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x}{\lambda^2+1}\, d\lambda$

6.83 (a) 解 $\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t)=0$, $U(x,0)=e^{-x}$, $x>0$, $U(x,t)$ 爲有界且 $x>0$，$t>0$

(b) 說明其物理意義。

答 $U(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda$

6.84 解 $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0,t)=0$, $U(x,0) = \begin{cases} x & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$, $U(x,t)$ 爲有界且 $x>0$，$t>0$

答 $U(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \frac{\cos\lambda - 1}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x\,d\lambda$

6.85 (a) 證明33題之答案可寫成

$$U(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(1-x)/2\sqrt{t}}^{(1+x)/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv$$

(b) 直接證明(a)中之函數滿足 $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 及33題之條件。

第七章

複數反變換公式

7·1　複數反變換公式

若 $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$，則 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ 爲

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\, ds, \qquad t > 0 \tag{1}$$

而當 $t < 0$ 時，$F(t) = 0$，此結果稱爲**複數反變換積分式公式**（Complex inversion integral or formula），亦稱爲**布拉威齊積分公式**（Bromwich's integral formula）。此式可用於直接計算已知函數 $f(s)$ 的反拉氏變換。

(1)式之積分路徑乃沿複數平面上之直線 $x = \gamma$，其中 $s = x + iy$。實數 γ 之選取，必須使得所有的奇點（含極點、分枝點、本性奇點），均在直線 $x = \gamma$ 之左方。

7·2　布拉威齊路徑

在實際上，(1)式的計算乃由下列線積分求得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds \tag{2}$$

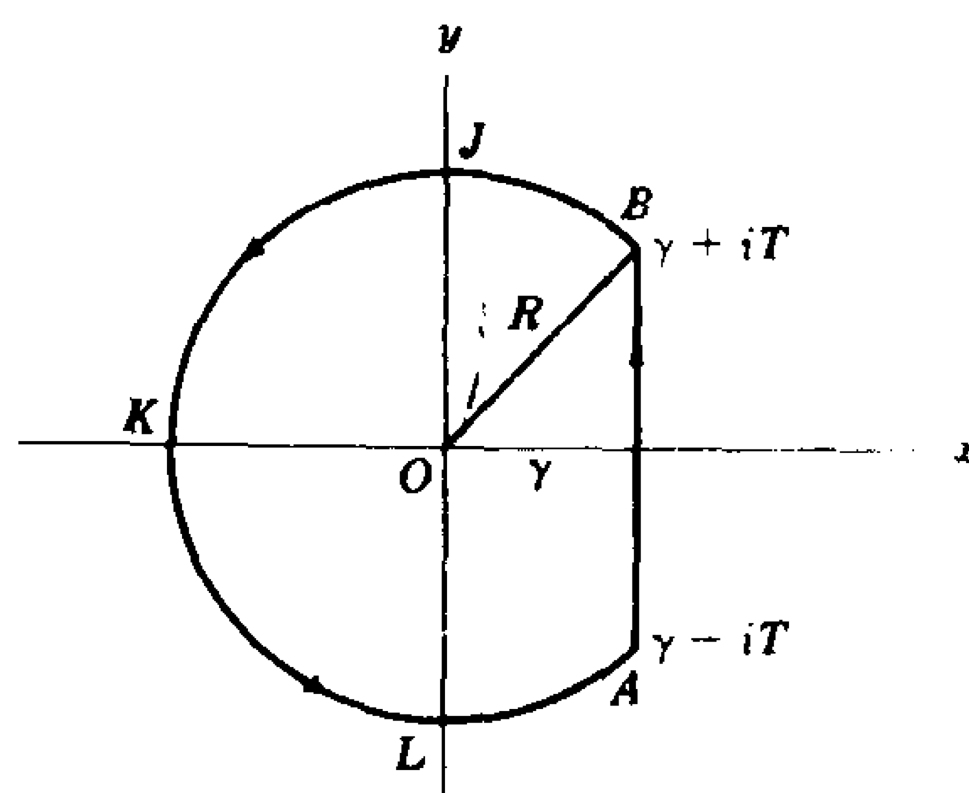


圖 7-1

其中 C 爲圖 7-1 的路徑。此路徑通常稱爲**布拉威齊路徑**（Bromwich's contour），乃由直線 AB，及弧形 $BJKLA$（爲圓心 O，半徑 R 之圓的一部份）所組成。

如果以 Γ 代表弧形 $BJKLA$，則因 $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$，(1)式可寫成

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} f(s)\, ds \\ &= \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

7·3 利用留數定理求反拉氏變換

假設 $f(s)$ 的奇點均為極點，且均在 $x=\gamma$ 的左邊，再假設在(3)式中，當 $R\to\infty$ 時，沿 Γ 的積分會趨於零，故由留數定理，可將(3)式寫為

$$F(t) = \text{在} f(s) \text{的極點上，} e^{st}f(s) \text{的留數和} \tag{4}$$
$$= \sum(\text{在} f(s) \text{的極點，} e^{st}f(s) \text{的留數})$$

7·4 沿 Γ 的積分值趨近於零的充分條件

(4)式的成立，須假設當 $R\to\infty$ 時，(3)式中沿 Γ 的積分值趨近於零。此假設成立的充分條件如下示。

定理 7.1： 若我們可以找到常數 $M>0$ ，$k>0$ ，使得在 Γ 上（此時 $s=Re^{i\theta}$）時，

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k} \tag{5}$$

則當 $R\to\infty$ 時，$e^{st}f(s)$ 沿 Γ 的積分值將趨近於零，即

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} e^{st}f(s)\,ds = 0 \tag{6}$$

若 $f(s)=P(s)/Q(s)$，其中 $P(s)$ 及 $Q(s)$ 均為多項式，且 $P(s)$ 之次數小於 $Q(s)$，則(5)式之條件即會成立，參見 15 題。

若 $f(s)$ 有除了極點之外的奇點時，以上之推論仍成立。

7·5 碰到分枝點時，布拉威齊路徑的修改

若 $f(s)$ 含有分枝點，只要將布拉威齊路徑適當地修改，則上述各結論仍然適用。例如，若 $f(s)$ 只有一個分枝點在 $x=0$ ，則我們可利用圖 7-2 的路徑。在此圖中，BDE 及 LNA 均為圓弧（圓心 O，半徑 R 之圓的一部份），HJK 則為另一較小圓（圓心 O，半徑 ϵ）之圓弧。在此情況下計算反拉氏變換的細節，可參見第 9 題。

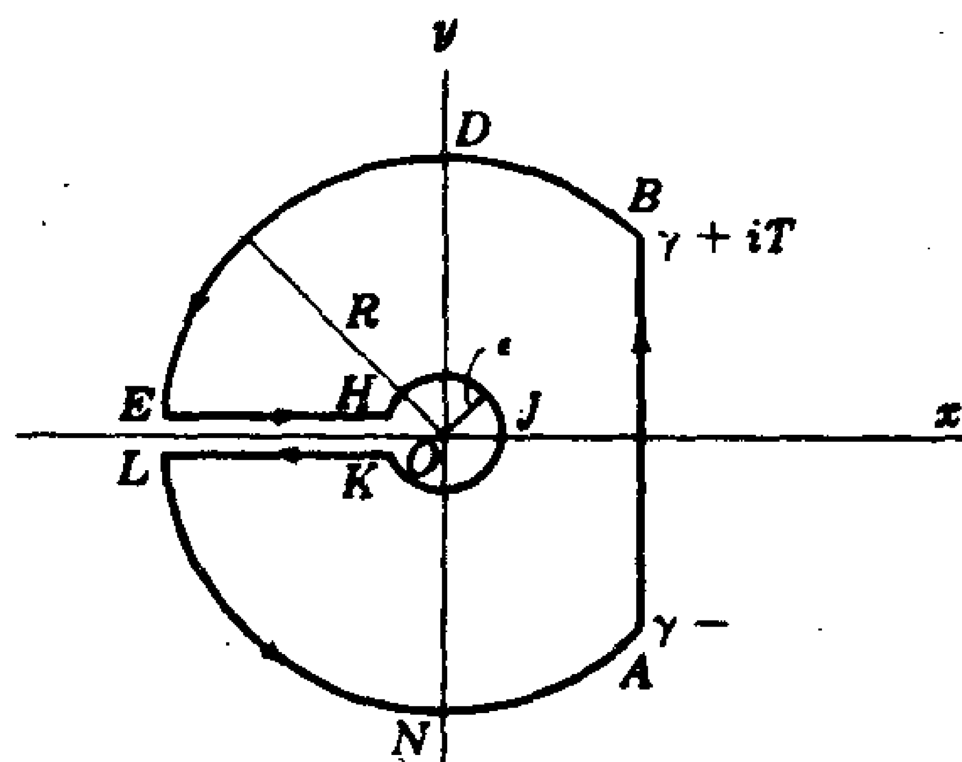


圖 7-2

7-6 具有無限多個奇點的情形

若一函數具有無限多個孤立奇點，則亦可利用上法以求得反拉氏變換。在此情形時，必須選擇布拉威齊路徑中的圓弧半徑 R_m，使得此曲線只有包含一部份有限個奇點，但不經過任何奇點。藉著令 $m \to \infty$，並求取適當的極限值。可求得所需的反拉氏變換，參見13及14題。

附解題

複數反變換公式

7.1 證明複數反變換公式

圖 由定義 $f(s) = \int_0^\infty e^{-su} F(u)\,du$ 故

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s)\,ds = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \int_0^\infty e^{st-su} F(u)\,du\,ds$$

令 $s = \gamma + iy$, $ds = i\,dy$, 代入上式

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-T}^{T} e^{iyt}\,dy \int_0^\infty e^{-iyu} [e^{-\gamma u} F(u)]\,du = \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \begin{cases} 2\pi e^{-\gamma t} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

（其中利用到第6章的傅氏積分定理）故

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s)\,ds \qquad t > 0$$

得證。

在上面的證明中，我們假設 $e^{-\gamma u} F(u)$ 在 $(0, \infty)$ 間爲絕對可積（Absolutely integrable），即 $\int_0^\infty e^{-\gamma u} |F(u)|\,du$ 收斂，故可引用傅氏積分定理。此假設成立的充分條件是 $F(t)$ 必須爲 γ 指數級，而 γ 的選取必須使得 $f(s)$ 的所有奇點在複數平面上均在直線 $x = \gamma$ 的左方。除此條件外，γ 無其他限制。

7.2 令 Γ 代表布拉威齊路徑中的曲線部份 $BJPKQLA$，其方程式爲 $s = Re^{i\theta}$，$\theta_0 \le \theta \le 2\pi - \theta_0$，即 Γ 爲圓心 O，半徑 R 的圓的一部份。假設在 Γ 上時，下式成立

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k}$$

其中$K>0$且M爲常數。證明：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} e^{st} f(s)\, ds = 0$$

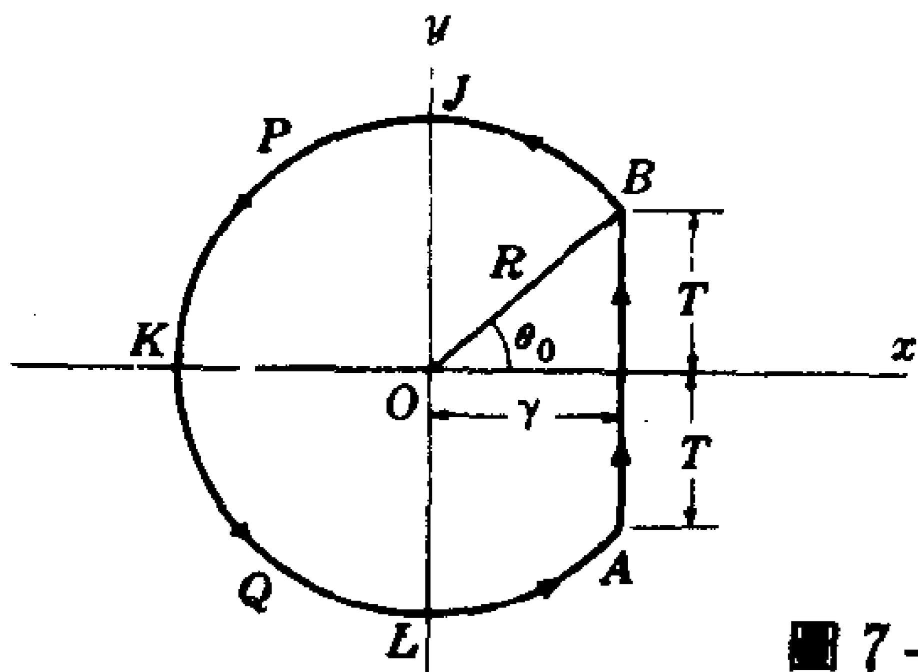


圖 7-3

圖 若Γ_1，Γ_2，Γ_3及Γ_4分別代表圓弧BJ，JPK，KQL及LA，則

$$\int_{\Gamma} e^{st} f(s)\, ds = \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_3} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_4} e^{st} f(s)\, ds$$

若我們可證明在$R\to\infty$時，等號右端的積分式均趨近於零，則即可得證。以下四個積分式來討論。

情況 1：沿Γ_1（BJ）的積分

沿Γ_1時，$s=Re^{i\theta},\ \theta_0\leqq\theta\leqq\pi/2$，即

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s)\, ds = \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$

$$|I_1| \leqq \int_{\theta_0}^{\pi/2} |e^{(R\cos\theta)t}|\, |e^{i(R\sin\theta)t}|\, |f(Re^{i\theta})|\, |iRe^{i\theta}|\, d\theta$$

$$\leqq \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R\cos\theta)t}\, |f(Re^{i\theta})|\, R\, d\theta$$

$$\leqq \frac{M}{R^{k-1}}\int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R\cos\theta)t}\, d\theta = \frac{M}{R^{k-1}}\int_{0}^{\phi_0} e^{(R\sin\phi)t}\, d\phi$$

其中我們用到在Γ_1上的已知條件$|f(s)|\leq M/R^k$，並用到代換式$\theta=\pi/2-\phi$，且$\phi_0=\pi/2-\theta_0=\sin^{-1}(\gamma/R)$

因$\sin\phi\leq\sin\phi_0\leq\cos\theta_0=\gamma/R$，故上述之最後一項積分式會小或等於

$$\frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\phi_0} e^{\gamma t}\, d\phi = \frac{M e^{\gamma t}\phi_0}{R^{k-1}} = \frac{M e^{\gamma t}}{R^{k-1}}\sin^{-1}\frac{\gamma}{R}$$

但當$R\to\infty$時，上式最右端之值趨近於零（當R很大時$\sin^{-1}(\gamma/R)\approx\gamma/R$），故$\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$

情況 2：沿Γ_2（JPK）的積分

沿Γ_2時，$s=Re^{i\theta},\ \pi/2\leqq\theta\leqq\pi$，即

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s)\, ds = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$

如同情況 1，可得

$$|I_2| \leqq \frac{M}{R^{k-1}}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{(R\cos\theta)t}\,d\theta \leqq \frac{M}{R^{k-1}}\int_{0}^{\pi/2} e^{-(R\sin\phi)t}\,d\phi$$

其中代入$\theta=\pi/2+\phi$。

但當$0\leq\phi\leq\pi/2$時，$\sin\phi\geq 2\phi/\pi$（見第3題），故上述之最後一項積分式會小或等於

$$\frac{M}{R^{k-1}}\int_{0}^{\pi/2} e^{-2R\phi t/\pi}\,d\phi = \frac{\pi M}{2tR^k}(1-e^{-Rt})$$

當$R\to\infty$時，上式趨近於零，故 $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$

情況 3：沿Γ_3（KQL）的積分

可用類似情況 2 的推導過程解之（見 58 題(a)）。

情況 4：沿Γ_4（LA）的積分

可用類似情況 1 的推導過程解之（見 58 題(b)）。

7.3 證明當$0\leqq\phi\leqq\pi/2$時 $\sin\phi \geqq 2\phi/\pi$

圖解 1：

見圖 7-4，曲線OPQ為正弦曲線$y=\sin\phi$的一部份，而$y=2\phi/\pi$為直線PQ，故在幾何上可明顯看出：當$0\leq\phi\leq\pi/2$時，$\sin\phi\geq 2\phi/\pi$。

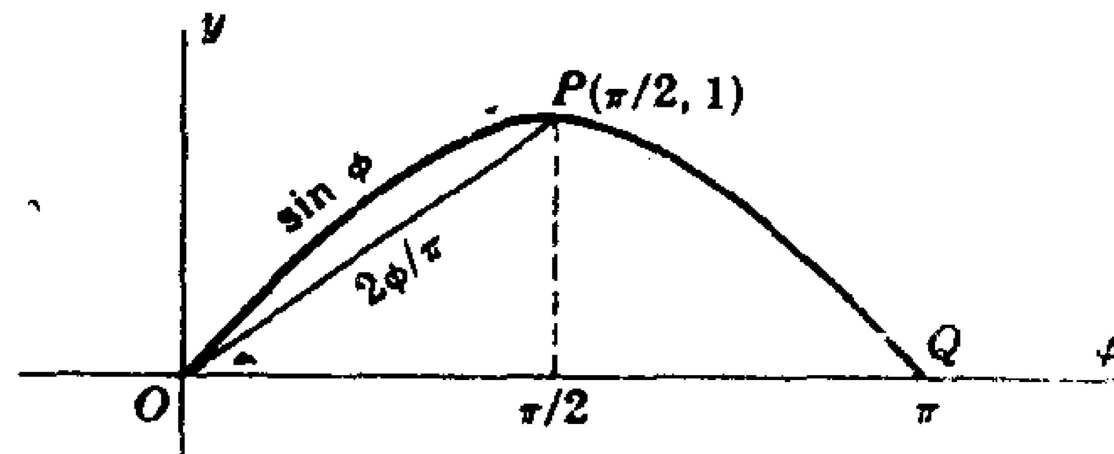


圖7-4

解 2：解析解法

令 $F(\phi)=\dfrac{\sin\phi}{\phi}$，則

$$\frac{dF}{d\phi} = F'(\phi) = \frac{\phi\cos\phi-\sin\phi}{\phi^2} \tag{1}$$

若 $G(\phi) = \phi\cos\phi-\sin\phi$, 則

$$\frac{dG}{d\phi} = G'(\phi) = -\phi\sin\phi \tag{2}$$

故當$0\leq\phi<\pi/2$時，$G'(\phi)\leq 0$，即$G(\phi)$為遞減函數。因$G(0)=0$，故$G(\phi)\leq 0$。再由(1)式，得$F'(\phi)\leq 0$，即$F(\phi)$為遞減函數。定義$F(0)=\lim_{\phi\to 0}F(\phi)=1$，則當$\phi$由 0 增至$\pi/2$時，$F(\phi)$由 1 減至$2/\pi$，故

$$1 \geqq \frac{\sin\phi}{\phi} \geqq \frac{2}{\pi}$$

由此可得證。

利用留數定理求反拉氏變換

7.4 假設 $f(s)$ 的所有奇點均為極點，且這些奇點均在直線 $x=\gamma$（γ 為實數）的左方，再假設 $f(s)$ 滿足第 2 題中的條件，證明 $f(s)$ 的反拉氏變換為

$F(t)=$ 在所有 $f(s)$ 的極點上，$e^{st}f(s)$ 的留數和

解 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st}f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st}f(s)\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st}f(s)\,ds$$

其中 C 為第 2 題的布拉威齊路徑，而 Γ 為圖 7-3 的圓弧 $BJPKQLA$，由留數定理得

$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st}f(s)\,ds=$ 在 C 內部的所有 $f(s)$ 極點上，$e^{st}f(s)$ 的留數和

$=\sum$ C 內部的留數

故 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st}f(s)\,ds=\sum$ C 內部的留數 $-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st}f(s)\,ds$

令 $R\to\infty$，由第 2 題可得

$F(t)=$ 在所有 $f(s)$ 的極點上，$e^{st}f(s)$ 的留數和

7.5 (a) 證明 $f(s)=\dfrac{1}{s-2}$ 滿足第 2 題的條件。

(b) 求 $\dfrac{e^{st}}{s-2}$ 在極點 $s=2$ 的留數。

(c) 利用複數反變換公式，計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}$

解 (a) 令 $s=Re^{i\theta}$，則

$$\left|\frac{1}{s-2}\right| = \left|\frac{1}{Re^{i\theta}-2}\right| \le \frac{1}{|Re^{i\theta}|-2} = \frac{1}{R-2} < \frac{2}{R}$$

當 $R>4$，上式不等式即可成立。故取 $k=1$，$M=2$，即可滿足第 2 題中的條件。在上述推導過程中，我們用到了下列不等式 $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$（參見第 5 章 49 題(c)）。

(b) 在單極點 $s=2$ 的留數為

$$\lim_{s\to 2}(s-2)\left(\frac{e^{st}}{s-2}\right) = e^{2t}$$

(c) 由第 4 題及(a)(b)之結論，可知

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{st} f(s) \text{ 的留數和 } = e^{2t}$$

在此布拉威齊路徑中的 γ，乃是任意大於 2 的實數，且此路徑包含極點 $s=2$。

7.6 利用留數法，計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$

答 因此題中的 $f(s)$ 滿足(5)式（此可由第 5 題或第 15 題而得），故

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st}\,ds}{(s+1)(s-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{st}\,ds}{(s+1)(s-2)^2}$$

$$= \sum \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \text{ 在極點 } s=-1 \text{ 和 } s=2 \text{ 的留數}$$

在單極點 $s=-1$ 的留數爲

$$\lim_{s\to -1}(s+1)\left\{\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \frac{1}{9}e^{-t}$$

在雙重極點 $s=2$ 的留數爲

$$\lim_{s\to 2}\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-2)^2\left\{\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right\}\right] = \lim_{s\to 2}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s+1}\right]$$

$$= \lim_{s\to 2}\frac{(s+1)te^{st}-e^{st}}{(s+1)^2} = \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

故 $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \sum \text{ 留數 } = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

7.7 計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\}$

答 如同第 6 題，所求即爲下式在 3 階極點 $s=-1$ 及 2 階極點 $s=1$ 的留數和

$$\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}$$

在 $s=-1$ 的留數爲

$$\lim_{s\to -1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right] = \lim_{s\to -1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{se^{st}}{(s-1)^2}\right] = \frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2)$$

在 $s=1$ 的留數爲

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right] = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{se^{st}}{(s-1)^2}\right] = \frac{1}{16}e^t(2t-1)$$

故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\} = \Sigma$ 留數 $= \frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2) + \frac{1}{16}e^t(2t-1)$

7.8 計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

圖 因 $\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{[(s+i)(s-i)]^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2}$

所求卽爲下式在 2 階極點 $s=i$ 及 $s=-i$ 的留數和

$$\frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}$$

在 $s=i$ 的留數爲

$$\lim_{s\to i}\frac{d}{ds}\left[(s-i)^2\frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}$$

在 $s=-i$ 的留數爲

$$\lim_{s\to -i}\frac{d}{ds}\left[(s+i)^2\frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{-it} + \frac{1}{4}ie^{-it}$$

上式亦可由在前一式中，以 $-i$ 取代 i 而得。故

$$\begin{aligned}\Sigma\text{留數} &= -\frac{1}{4}t(e^{it}+e^{-it}) - \frac{1}{4}i(e^{it}-e^{-it}) \\ &= -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)\end{aligned}$$

可和第 2 章第18 題比較之。

具有分枝點之函數的反拉氏變換

7.9 利用複數反變換公式，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\}$

圖 由複數反變換公式，所求之反拉氏變換爲

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds \qquad (1)$$

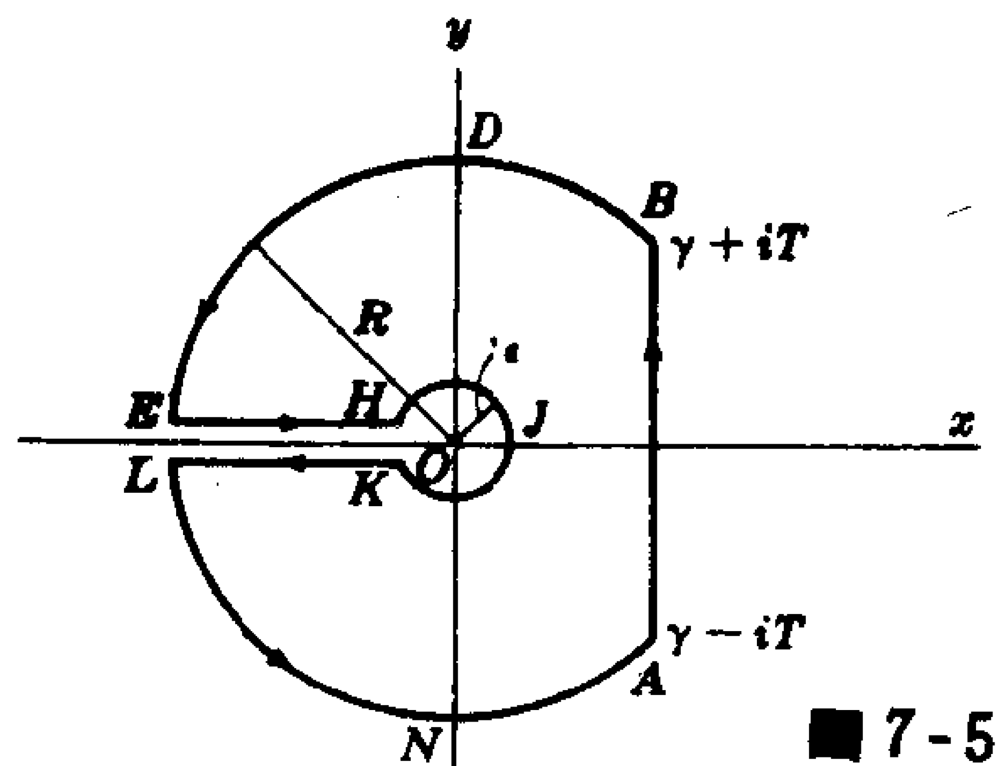


圖 7-5

但因 $s=0$ 爲被積函數的分枝點，故我們先考慮

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{BDE}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{LNA}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds$$

其中 C 爲圖 7-5 之路徑，包含直線 AB（$x=\gamma$），弧形 BDE 及 GNA（均爲圓心在原點 O，半徑爲 R 之圓的一部份），以及弧形 HJK（爲圓心 O，半徑 ϵ 之圓的一部份）。

因被積函數的唯一奇點 $s=0$ 並不在 C 的內部，故由柯西定理，上式左端爲零。又，被積函數滿足第 2 題的條件（見 61 題），故當 $R\to\infty$ 時，沿 BDE 及 LNA 的積分值均趨近於零，故

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds \\ &= -\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds + \int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds + \int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

沿 EH 時，$s=xe^{\pi i}$, $\sqrt{s}=\sqrt{x}\,e^{\pi i/2}=i\sqrt{x}$ 且當 s 由 $-R$ 變至 $-\epsilon$ 時，x 從 R 變至 ϵ。

$$\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds = \int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds = \int_R^{\epsilon}\frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}dx$$

同理，沿 KL 時，$s=xe^{-\pi i}$, $\sqrt{s}=\sqrt{x}\,e^{-\pi i/2}=-i\sqrt{x}$ 且當 s 從 $-\epsilon$ 變至 $-R$ 時，x 從 ϵ 變至 R，

$$\int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds = \int_{-\epsilon}^{-R}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds = \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}dx$$

沿 HJK 時，$s=\epsilon e^{i\theta}$，故

$$\begin{aligned} \int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}ds &= \int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}t-a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}}{\epsilon e^{i\theta}}i\epsilon e^{i\theta}d\theta \\ &= i\int_{\pi}^{-\pi}e^{\epsilon e^{i\theta}t-a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}d\theta \end{aligned}$$

由上可知(2)式可化爲

$$F(t) = -\lim_{\substack{R\to\infty \\ \epsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_R^{\epsilon}\frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}dx + \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}dx + i\int_{\pi}^{-\pi}e^{\epsilon e^{i\theta}t-a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}d\theta\right\}$$

$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\epsilon^R \frac{e^{-xt}(e^{ai\sqrt{x}} - e^{-ai\sqrt{x}})}{x}\,dx + i\int_\pi^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$

$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{2i\int_\epsilon^R \frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}\,dx + i\int_\pi^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$

因極限符號可放入積分符號內，故

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\pi^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}\,d\theta = \int_\pi^{-\pi} 1\,d\theta = -2\pi$$

因此
$$F(t) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}\,dx \tag{3}$$

上式可寫爲（見第10題）

$$F(t) = 1 - \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t}) = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t}) \tag{4}$$

7.10 證明 $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}\,dx = \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$ 由此使第9題的最後結果(4)式得以成立。

解 令 $x = u^2$，所求積分變爲

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2t}\sin au}{u}\,du$$

對 a 微分，並利用第1章183題，得

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2t}\cos au\,du = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-a^2/4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$$

故（利用 $a = 0$ 時，I 亦爲零）

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-p^2/4t}\,dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du = \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$$

故得證。

7.11 求 $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\}$

解 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則 $\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) = sf(s)$ 其中假設 $F(0) = 0$，故若 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ 且 $F(0) = 0$，則 $\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = F'(t)$

由第9題及第10題，可得

$$F(t) = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du$$

故$F(0) = 0$且
$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

由以上可得

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} = F'(t) = \frac{d}{dt}\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\,t^{-3/2}\,e^{-a^2/4t}$$

具有無限多奇點之函數的反拉氏變換

7.12 求 $f(s) = \dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}$ 的所有奇點，其中 $0 < x < 1$。

解　因$\sqrt{s}$的出現，$s = 0$似乎是分枝點，但事實不然，可由下式看出

$$f(s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}} = \frac{1 + (x\sqrt{s})^2/2! + (x\sqrt{s})^4/4! + \cdots}{s\{1 + (\sqrt{s})^2/2! + (\sqrt{s})^4/4! + \cdots\}}$$

$$= \frac{1 + x^2 s/2! + x^4 s^2/4! + \cdots}{s\{1 + s/2! + s^2/4! + \cdots\}}$$

由上可看出 $s = 0$ 並非分枝點，而是單極點。

函數 $f(s)$ 具有無限多極點，可由下列方程式之根求得

$$\cosh\sqrt{s} = \frac{e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}}{2} = 0$$

即　$e^{2\sqrt{s}} = -1 = e^{\pi i + 2k\pi i}$　　$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

故　$\sqrt{s} = (k + \frac{1}{2})\pi i$　即　$s = -(k + \frac{1}{2})^2\pi^2$

這些是單極點（見56題）。

故 $f(s)$ 在下列各值爲單極點

$$s = 0 \text{ 及 } s = s_n \text{ 其中 } s_n = -(n - \tfrac{1}{2})^2\pi^2,\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

7.13 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\}$ 其中 $0 < x < 1$。

解　可由圖7-6的布拉威齊路徑來求得答案。其中直線 AB 的選取，乃是要使所有的極點（參見12題）

$s = 0$ 及 $s = s_n = -(n - \frac{1}{2})^2\pi^2$,

$n = 1, 2, 3, \cdots$

均在直線 AB 的左方。

而曲線 $BDEFGHA$ 乃爲圓 Γ_m（圓心在原點，半徑 $R_m = m^2\pi^2$）

$$R_m = m^2\pi^2$$

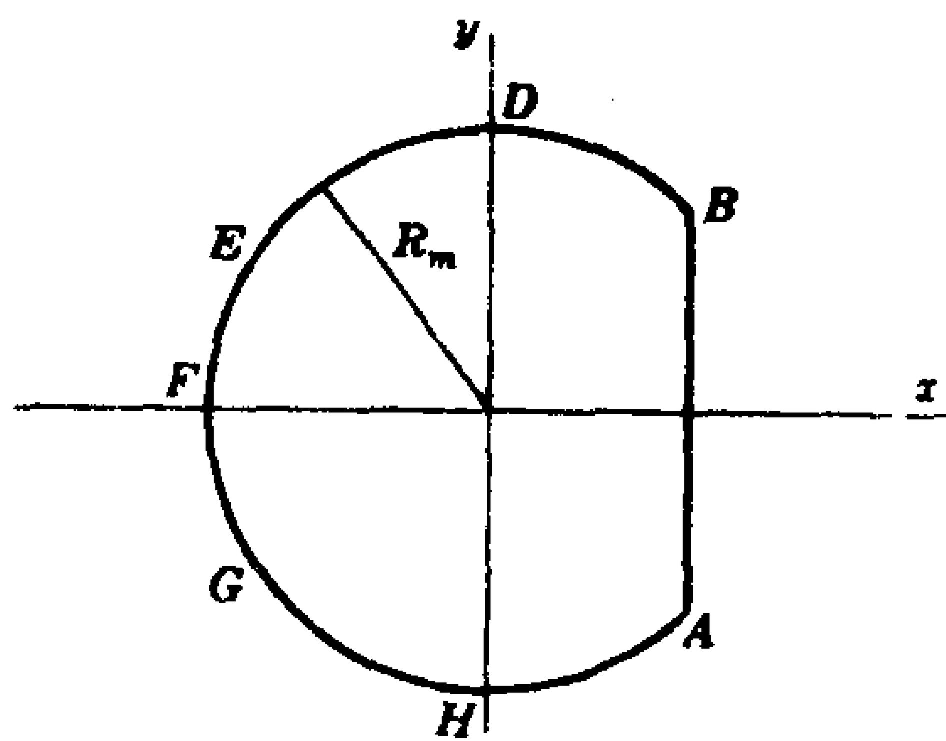


圖7-6

之一部份，其中m爲正整數。半徑R_m的選定使得此路徑不包含任一極點。

我們現在要計算在

$$\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}$$

之極點的留數。即

在 $s=0$ 的留數爲 $\lim_{s\to 0}(s-0)\left\{\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\} = 1$

在 $s=-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2,\ n=1,2,3,\ldots$ 的留數爲

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_n}(s-s_n)\left\{\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\} &= \lim_{s\to s_n}\left\{\frac{s-s_n}{\cosh\sqrt{s}}\right\}\lim_{s\to s_n}\left\{\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s}\right\}\\ &= \lim_{s\to s_n}\left\{\frac{1}{(\sinh\sqrt{s})(1/2\sqrt{s})}\right\}\lim_{s\to s_n}\left\{\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s}\right\}\\ &= \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\cos(n-\tfrac{1}{2})\pi x\end{aligned}$$

若C_m爲圖 7-6 的路徑，則

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m}\frac{e^{st}\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\,ds = 1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\cos(n-\tfrac{1}{2})\pi x$$

令$m\to\infty$，則沿Γ_m的積分趨近於零（見54題），故得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\} &= 1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\cos(n-\tfrac{1}{2})\pi x\\ &= 1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\end{aligned}$$

7.14 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh sx}{s^2\cosh sa}\right\}$ 其中 $0<x<a$。

解 函數 $f(s)=\frac{\sinh sx}{s^2\cosh sa}$ 之極點爲 $s=0$ 及滿足 $\cosh sa=0$ 之點，即

$$s = s_k = (k+\tfrac{1}{2})\pi i/a \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

由於s^2的出現，$s=0$似乎是2階極點，但事實不然，因當s接近零時

$$\begin{aligned}\frac{\sinh sx}{s^2\cosh sa} &= \frac{sx+(sx)^3/3!+(sx)^5/5!+\cdots}{s^2\{1+(sa)^2/2!+(sa)^4/4!+\cdots\}}\\ &= \frac{x+s^2x^3/3!+s^4x^5/5!}{s\{1+s^2a^2/2!+s^4a^4/4!+\cdots\}}\end{aligned}$$

由上式可知$s=0$爲1階極點，即單極點。極點s_k亦爲單極點（見56題）。

如同13題，我們可得 $e^{st}f(s)$ 在上述極點的留數。

在 $s=0$ 的留數爲

$$\lim_{s\to 0}(s-0)\left\{\frac{e^{st}\sinh sx}{s^2\cosh sa}\right\} = \left\{\lim_{s\to 0}\frac{\sinh sx}{s}\right\}\left\{\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{\cosh sa}\right\} = x$$

其中用到羅哈士比托規則。

在 $s=s_k$ 的留數爲

$$\lim_{s\to s_k}(s-s_k)\left\{\frac{e^{st}\sinh sx}{s^2\cosh sa}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{s-s_k}{\cosh sa}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\sinh sx}{s^2}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{1}{a\sinh sa}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\sinh sx}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{ai\sin(k+\frac{1}{2})\pi}\cdot\frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi it/a}\,i\sin(k+\frac{1}{2})\pi x/a}{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2/a^2}$$

$$= -\frac{a(-1)^k e^{(k+\frac{1}{2})\pi it/a}\sin(k+\frac{1}{2})\pi x/a}{\pi^2(k+\frac{1}{2})^2}$$

利用適當的求極限程序（如同13題），求出留數之和，故得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh sx}{s^2\cosh sa}\right\} = x - \frac{a}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{(k+\frac{1}{2})\pi it/a}\sin(k+\frac{1}{2})\pi x/a}{(k+\frac{1}{2})^2}$$

$$= x + \frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n-\frac{1}{2})\pi t/a\,\sin(n-\frac{1}{2})\pi x/a}{(n-\frac{1}{2})^2}$$

$$= x + \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$$

其他各類問題

7.15 令 $f(s)=P(s)/Q(s)$，其中 $P(s)$ 及 $Q(s)$ 均爲多項式，且 $P(s)$ 之次數小於 $Q(s)$。證明 $f(s)$ 滿足第2題中的條件。

圖 令

$$P(s) = a_0s^m + a_1s^{m-1} + \cdots + a_m$$
$$Q(s) = b_0s^n + b_1s^{n-1} + \cdots + b_n$$

其中 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$ 且 $0\leq m<n$，若 $s=Re^{i\theta}$，則

$$|f(s)| = \left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right| = \left|\frac{a_0s^m + a_1s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \cdots + b_n}\right|$$

$$= \left|\frac{a_0R^m e^{mi\theta} + a_1R^{m-1}e^{(m-1)i\theta} + \cdots + a_m}{b_0R^n e^{ni\theta} + b_1R^{n-1}e^{(n-1)i\theta} + \cdots + a_n}\right|$$

$$= \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \frac{1}{R^{n-m}} \left|\frac{1 + (a_1/a_0R)e^{-i\theta} + (a_2/a_0R^2)e^{-2i\theta} + \cdots + (a_m/a_0R^m)e^{-ni\theta}}{1 + (b_1/b_0R)e^{-i\theta} + (b_2/b_0R^2)e^{-2i\theta} + \cdots + (b_n/b_0R^n)e^{-ni\theta}}\right|$$

令 A 爲 $|a_1/a_0|, |a_2/a_0|, \ldots, |a_m/a_0|$ 之中最大者，

且 B 爲 $|b_1/b_0|, |b_2/b_0|, \ldots, |b_n/b_0|$ 之中最大者，

則

$$\left|1 + \frac{a_1}{a_0R}e^{-i\theta} + \frac{a_2}{a_0R^2}e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{a_m}{a_0R^m}e^{-mi\theta}\right| \leqq 1 + \frac{A}{R} + \frac{A}{R^2} + \cdots + \frac{A}{R^m}$$

$$\leqq 1 + \frac{A}{R}\left(1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \cdots\right)$$

$$\leqq 1 + \frac{A}{R-1} < 2$$

其中 $R > A + 1$

又，

$$\left|1 + \frac{b_1}{b_0R}e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0R^2}e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{b_n}{b_0R^n}e^{-ni\theta}\right|$$

$$\geqq 1 - \left|\frac{b_1}{b_0R}e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0R^2}e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{b_n}{b_0R^n}e^{-ni\theta}\right|$$

$$\geqq 1 - \left(\frac{B}{R} + \frac{B}{R^2} + \cdots + \frac{B}{R^n}\right)$$

$$\geqq 1 - \frac{B}{R}\left(1 + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} + \cdots\right)$$

$$\geqq 1 - \frac{B}{R-1} \geqq \frac{1}{2}$$

其中 $R > 2B + 1$

故只要 R 大於 $A + 1$ 或 $2B + 1$，就有

$$|f(s)| \leqq \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \cdot \frac{1}{1/2} \leqq \frac{M}{R^k}$$

其中 M 爲大於 $2|a_0/b_0|$ 的任意常數，且 $k = n - m \geqq 1$ 故得證。

7.16 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}\right\}$ 其中 $0 < x < a$。

答 (a) **解 1**：由 13 題可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2t/4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

以 ks 取代 s，由標度改變性質可知

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{ks}}{ks\cosh\sqrt{ks}}\right\} = \frac{1}{k}\left\{1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2t/4k}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right\}$$

將上式乘上 k，並以 a^2 取代 k，以 x/a 取代 x，即可得所求答案

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

解 2：可直接由反變換公式求得，如同13題。

7.17 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh sx}{s^3\cosh sb}\right\}$ 其中 $0 < x < b$。

答 令 $f(s) = \dfrac{\cosh sx}{s^3\cosh sb}$，則 $s=0$ 爲3階極點，而 $s = s_k = (2k+1)\pi i/2b,\ k=0, \pm 1$，$\pm 2$，…（爲 $\cosh sb = 0$ 之根）爲單極點。如同13題的方法，$e^{st}f(s)$ 在 $s = s_k$ 的留數爲

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to s_k}(s-s_k)\left\{\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3\cosh sb}\right\}\\
&= \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{s-s_k}{\cosh sb}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3}\right\}\\
&= \frac{1}{b\sinh(2k+1)\pi i/2}\cdot\frac{e^{(2k+1)\pi it/2b}\cosh(2k+1)\pi ix/2b}{\{(2k+1)\pi i/2b\}^3}\\
&= \frac{(-1)^k 8b^2 e^{(2k+1)\pi it/2b}}{(2k+1)\pi^3}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2b}
\end{aligned}$$

欲求在 $s=0$ 的留數，見下式

$$\begin{aligned}
\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3\cosh sb} &= \frac{1}{s^3}\left(1 + st + \frac{s^2t^2}{2!} + \cdots\right)\left\{\frac{1 + s^2x^2/2! + s^4x^4/4! + \cdots}{1 + s^2b^2/2! + s^4b^4/4! + \cdots}\right\}\\
&= \frac{1}{s^3}\left(1 + st + \frac{s^2t^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{s^2x^2}{2!} + \frac{s^4x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{s^2b^2}{2} + \frac{5s^4b^4}{24} \cdots\right)\\
&= \frac{1}{s^3}\left\{1 + st + \frac{s^2t^2}{2} + \frac{s^2x^2}{2} - \frac{s^2b^2}{2} + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

故留數（爲上式級數中，$1/s$ 的係數）爲 $\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2)$

在 $s=0$ 的留數也可由下式計算出

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^3}{ds^3}\left\{(s-0)^3\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3\cosh sb}\right\}$$

所求之拉氏變換，即爲上述之留數和，故爲

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) + \frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{(2k+1)\pi it/2b}}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2b}\\
&= \tfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) - \frac{16b^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2b}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2b}
\end{aligned}$$

這就是附錄B中表格的第123條。

7.18 一週期性電壓$E(t)$，爲方波之形式（見圖7-7），將此電源加於圖7-8之電路。假設在時間$t=0$時，電流爲零，試求其後任意時間之電流值。

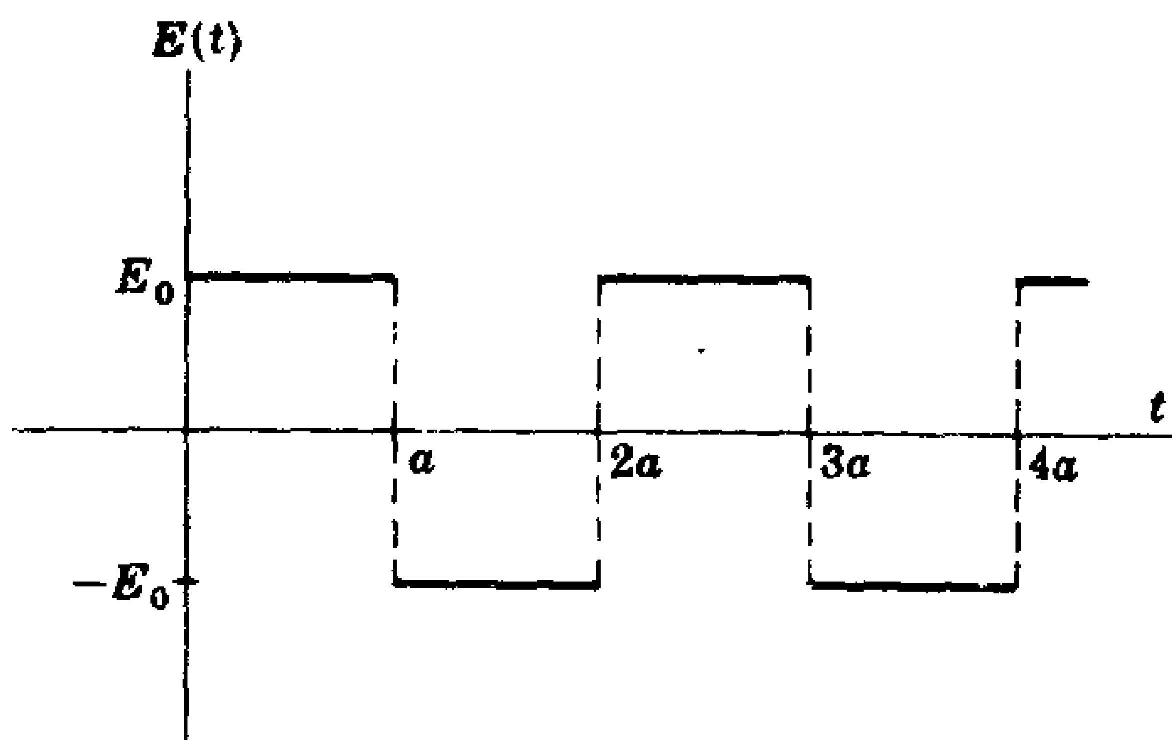


圖7-7

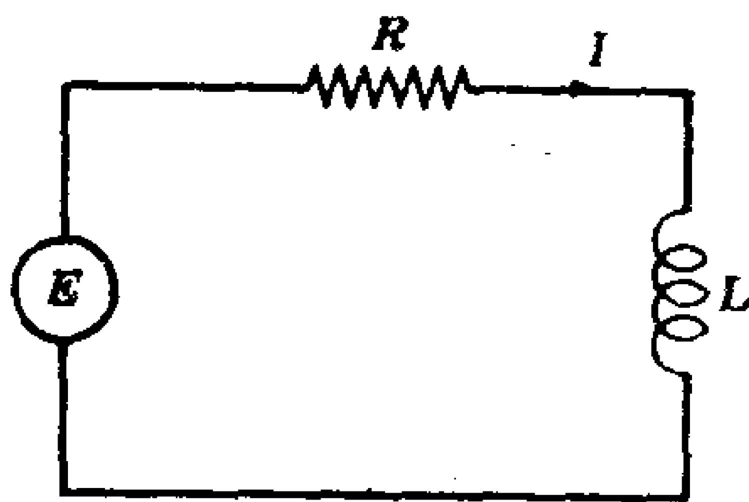


圖7-8

解 電路中之電流$I(t)$的微分方程式爲

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t) \quad \text{其中} \quad I(0)=0 \tag{1}$$

取拉氏變換，並利用附錄B表格中的135條，可得

$$Ls\tilde{I}+R\tilde{I}=\frac{E_0}{s}\tanh\frac{as}{2} \quad \text{即} \quad \tilde{I}(s)=\frac{E_0}{s(Ls+R)}\tanh\frac{as}{2}$$

其中 $\tilde{I}(s)=\mathcal{L}\{I(t)\}$ 故

$$I(t)=\frac{E_0}{L}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\} \tag{2}$$

函數 $f(s)=\dfrac{1}{s(s+R/L)}\tanh\dfrac{as}{2}$ 之單極點爲$s=-R/L$及滿足$\cosh(as/2)=0$之點，即 $s=s_k=(2k+1)\pi i/a,\ k=0,\pm1,\dots$（可和17題比較之）。$s=0$並非極點，因爲 $\lim\limits_{s\to0}\dfrac{\tanh(as/2)}{s}=\dfrac{a}{2}$ 不爲無限大，故$s=0$應爲可去奇點。

如同在13及17題中的解法，我們必須求得$e^{st}f(s)$在上述極點的留數，如下：

在$s=-R/L$的留數爲

$$\lim_{s\to-R/L}(s+R/L)\left\{\frac{e^{st}}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\}=\frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L}$$

在 $s=s_k=(2k+1)\pi i/a$ 的留數爲

$$\lim_{s\to s_k}(s-s_k)\left\{\frac{e^{st}}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s \to s_k} \frac{s - s_k}{\cosh(as/2)}\right\} \left\{\lim_{s \to s_k} \frac{e^{st}\sinh(as/2)}{s(s + R/L)}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{(a/2)\sinh(as_k/2)}\right\} \left\{\frac{e^{s_k t}\sinh(as_k/2)}{s_k(s_k + R/L)}\right\}$$

$$= \frac{2e^{(2k+1)\pi it/a}}{(2k+1)\pi i\{(2k+1)\pi i/a + R/L\}}$$

故留數之和爲

$$\frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2e^{(2k+1)\pi it/a}}{(2k+1)\pi i\{(2k+1)\pi i/a + R/L\}}$$

$$= \frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{aR\sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L\cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}}$$

故由(2)式可得所求爲

$$I(t) = \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{aR\sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L\cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}}$$

上式可改寫爲

$$I(t) = \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\{(2n-1)\pi t/a - \phi_n\}}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}^{1/2}}$$

其中 $\phi_n = \tan^{-1}\{(2n-1)\pi L/aR\}$

補充題

複數反變換公式及留數定理的應用

7.19 利用複數反變換公式計算下列各式：

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

答 (a) $\cos at$, (b) $(\sin at)/a$, (c) $\frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$

7.20 利用複數反變換公式，求下列各式的反拉氏變換。

(a) $1/(s+1)^2$, (b) $1/s^3(s^2+1)$

答 (a) te^{-t}, (b) $\frac{1}{2}t^2 + \cos t - 1$

7.21 (a)證明 $f(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$ 滿足反變換公式的條件，(b)求 $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$

答 (b) $e^{2t} - e^t$

7.22 計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$，並仔細驗證每一步驟。

答 $\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t$

7.23 (a) 計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^3}\right\}$，並仔細驗證每一步驟

(b) 驗算答案是否正確。

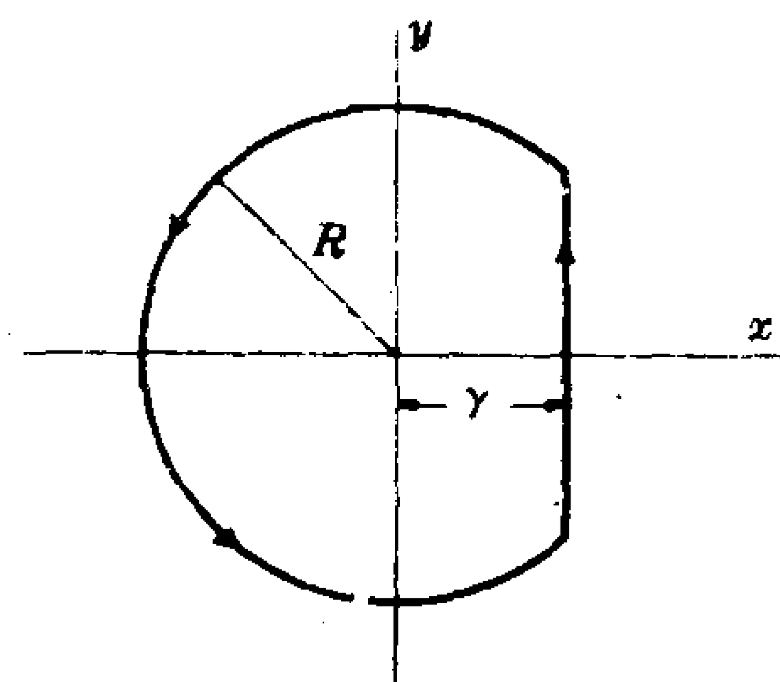


圖 7-9

7.24 (a) 計算 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{se^{st}}{(s^2-1)^2}ds$，積分路徑C如圖7-9所示，其中$R \geq 3$，$\gamma > 1$。

(b) 由拉氏變換理論的觀點來解釋你的答案。

7.25 利用反變換公式計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s-b)^2}\right\}$，其中$a$，$b$為任意大於零的常數。

7.26 利用反變換公式計算(a)第2章第13題(b)第2章第25題(c)第2章第28題(d)第2章第110題。

具有分枝點之函數的反拉氏變換

7.27 利用複數反變換公式求 $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\}$

7.28 由反變換公式求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$

7.29 利用反變換公式，證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \text{erf}\sqrt{t}$

7.30 利用反變換公式求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$

7.31 (a)利用複數反變換公式，計算 $\mathcal{L}^{-1}\{s^{-1/3}\}$ (b)再用其他方法驗證你的答案。

7.32 利用反變換公式，計算 $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s)\}$。答 $(1-e^{-t})/t$

7.33 由反變換公式計算 $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s^2)\}$。答 $2(1-\cos t)/t$

具有無限多奇點之函數的反拉氏變換

7.34 利用複數反變換公式，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(e^s+1)}\right\}$

7.35 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\cosh s}\right\} = 1 - \frac{4}{\pi}\left\{\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - \cdots\right\}.$

7.36 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2\sinh s}\right\}$。圖 $\frac{1}{2}t^2+\dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}(1-\cos n\pi t)$

7.37 利用複數反變換公式，證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3\sinh as}\right\}=\frac{t(t^2-a^2)}{6a}-\frac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi t}{a}$$

7.38 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)(1+e^{-2as})}\right\}=\dfrac{\sin\omega(t+a)}{2\omega}+\dfrac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi t/2a}{\omega^2-(2n-1)^2\pi^2/4a^2}$

其他各類問題

7.39 利用複數反變換公式，計算 (a) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-1)^4\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}/(s-1)^4\}$

7.40 利用線積分，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\}$。圖 $t\cos t$

7.41 計算 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^4}\right\}$。圖 $\dfrac{1}{48}\{3t^2\cos t+(t^3-3t)\sin t\}$

7.42 利用複數反變換公式，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\}$，並以其他方法驗證之。

7.43 (a) 證明函數 $f(s)=\dfrac{1}{s^2\cosh s}$ 滿足定理 7-1 的條件。

(b) 證明 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2\cosh s}\right\}=t+\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)\pi t.$

7.44 討論 43 題(b)及 35 題之結論的關係。

7.45 由反變換公式，並仔細驗證每一步驟，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4+4}\right\}$

圖 $\frac{1}{4}(\sin t\cosh t-\cos t\sinh t)$

7.46 (a) 證明當 $x>0$ 時

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-x\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}\right\}=e^{-x\sqrt{\omega/2}}\cos(\omega t-x\sqrt{\omega/2})-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{ue^{-ut}\sin x\sqrt{u}}{u^2+\omega^2}\,du$$

(b) 證明當 t 很大時，(a)中的積分項將趨近於零。

7.47 證明當 $0<x<1$ 時，$\dfrac{\sinh sx}{s^2\cosh s}=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x/2}{s^2+(2n-1)^2\pi^2/4}$

7.48 求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\operatorname{csch}^2 s}{s}\right\}$

7.49 證明當 $0 < x < 1$ 時，$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)\pi x/2}{s+(2n-1)^2\pi^2/4}$

7.50 證明

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\ln(1+1/s^2)}{1+e^{-2as}}\right\} = \frac{1-\cos(t+a)}{t+a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$$

7.51 證明當 $0 < x < a$ 時，

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh\sqrt{s}\,(a-x)}{\sinh\sqrt{s}\,a}\right\} = \frac{a-x}{a} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t/a^2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

7.52 利用反變換公式，求(a)第 2 章第 3 題(g)，(b)第 2 章第 9 題(a)，(c)第 2 章第 14 題。

7.53 利用反變換公式，解 $Y^{(iv)}(t) - a^4Y(t) = \sin at + e^{-at}$，已知條件爲 $Y(0)=2,\ Y'(0)=0,\ Y''(0)=-1,\ Y'''(0)=0$

7.54 證明當 $R\to\infty$ 時，第 13 題中沿 Γ 的積分值將趨近於零。

7.55 利用複數反變換公式，證明：(a)定理 2-3，(b)定理 2-5，(c)定理 2-10。

7.56 證明在(a) 12 題及(b) 14 題中所找到的極點均爲單極點（提示：若 $s=a$ 爲 $g(s)=0$ 的重根，則 $s=a$ 必爲 $g'(s)=0$ 的單根）。

7.57 (a)計算 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\dfrac{e^{st}}{\sqrt{s+1}}\,ds$，其中 $\gamma > 0$，(b)如何驗證你的答案？

答 $t > 0$ 時，原式爲 $t^{-1/2}e^{-t}/\sqrt{\pi}$

$t < 0$ 時，原式爲零。

7.58 完成第 2 題中，(a)情況 3 及(b)情況 4 的證明。

7.59 一週期電壓 $E(t)$ 之波形爲半波整流正弦曲線（如圖 7-10），將此電源加至圖 7-11 的電路。假設在 $t=0$ 時，電容上的電荷及電感上的電流均爲零，證明在其後之任意時間 t 時，電容上的電荷爲

$$Q(t) = \frac{\pi E_0}{LT^2\alpha^2\omega^2} + \frac{\pi E_0}{2LT}\left\{\frac{\sin\omega t - \sin\omega(t+T)}{\omega(\alpha^2-\omega^2)(1-\cos\omega T)} + \frac{\sin\alpha t - \sin\alpha(t+T)}{\alpha(\omega^2-\alpha^2)(1-\cos\alpha T)}\right\}$$
$$+ \frac{2\pi E_0}{LT^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nt/T}{(\omega^2-4\pi^2n^2/T^2)(\alpha^2-4\pi^2n^2/T^2)}$$

其中 $\omega^2 = 1/LC,\ \alpha^2 = \pi^2/T^2$ 且 $\omega \neq \alpha$。

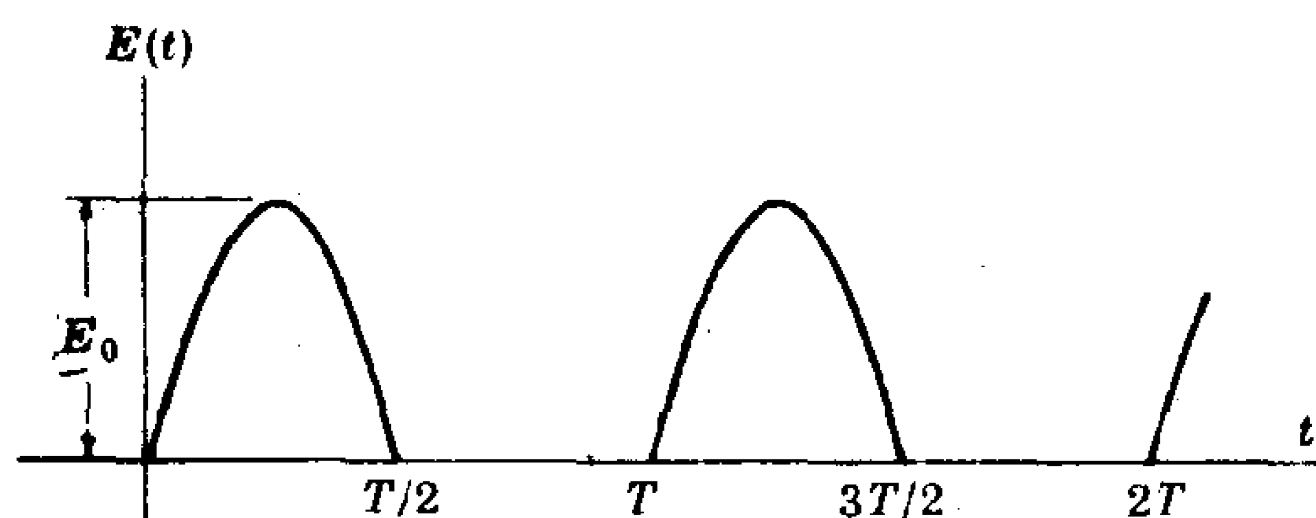


圖 7-10

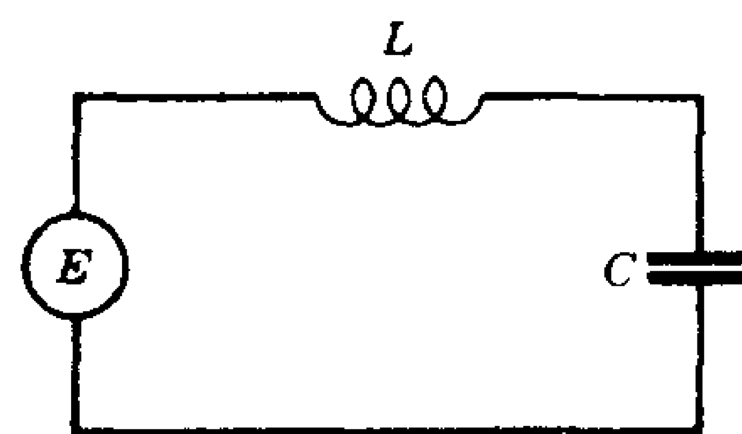


圖 7-11

7.60 若 $\alpha=\omega$，試重做 59 題，並討論其結果之物理意義。

7.61 對於函數 $e^{-a\sqrt{s}}/s,\ a>0$，驗證定理 7-1（見第 9 題）。

7.62 利用反變換公式，求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(1-e^{-as})}\right\}$，其中 $a>0$，並以其他方法驗證之。

7.63 證明 $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s^{1/3}}\} = \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty v^2 e^{-tv^3-v/2}\sin\frac{\sqrt{3}\,v}{2}\,dv$

7.64 推廣 63 題的結論。

7.65 一彈簧之彈力常數爲 k，不計其本身之重量。將此彈簧垂直懸吊於一固定點，並在其尾端加掛質量爲 m 的物體。將此物體自平衡點向下拉，使其位移爲 x_0，然後釋放，此物體就開始振盪。若在每一次此物體到達最低點時，由 $t=0$ 開始，並施加一單位脈衝之外力，試求在任意時間 $t>0$ 時，此物體的位置，並解釋其物理意義。

第八章

在邊界值問題方面的應用

8-1 和偏微分方程式有關的邊界值問題

許多在科學及工程方面的問題，若以數學形式描述之，常形成由1個或多個未知函數所構成的偏微分方程式，而且這些未知函數必須滿足由某些物理現象所引發的條件。

這些條件稱爲**邊界條件**（Boundary conditions）。求方程式的解，並滿足邊界條件，這就是**邊界值問題**（Boundary-value problem）。

8-2 某些重要的偏微分方程式

1. 一維熱傳導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$U(x, t)$代表在某物質中，位置x，時間t的溫度。常數k稱爲**擴散係數**（Diffusivity），等於$K/c\rho$，其中熱傳導係數（Thermal conductivity）K，比熱（Specific heat）c及密度（Density，即單位體積之質量）ρ均假設爲常數。在單位時間內，通過一平面上單位面積的熱量爲$-KU_x(x, t)$。

2. 一維波動方程式

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

此方程式適用於一拉緊之柔軟細繩的微小橫振動（見圖8-1）。變數$Y(x, t)$爲在時間t時，任意點x的位移，常數$a^2 = T/\rho$，其中T爲繩中之張力，爲一常數

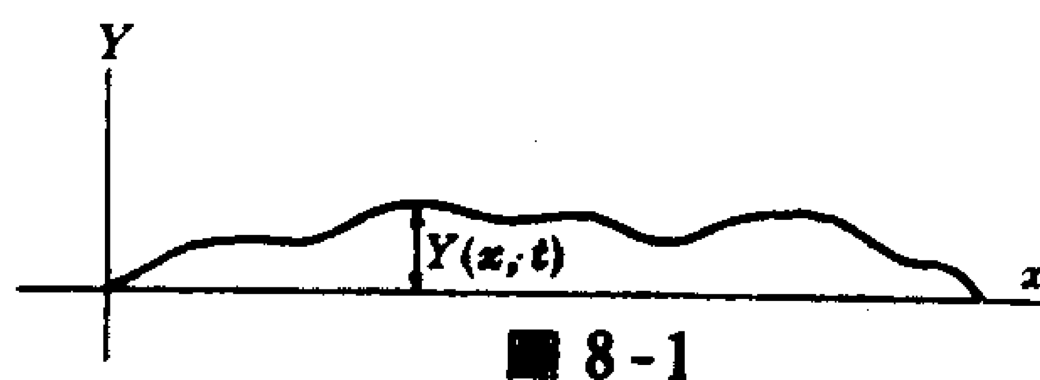


圖 8-1

，而 ρ 爲單位長度之質量，亦爲一常數。

3. 橫樑的縱振動

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

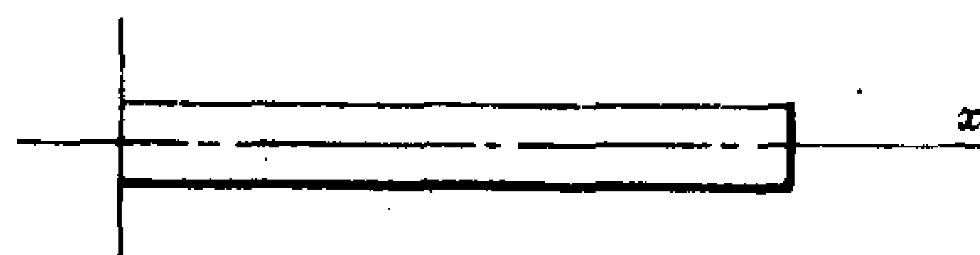


圖 8-2

此方程式描述橫樑沿縱方向（即 x 軸方向）之運動。變數 $Y(x, t)$ 爲在時間 t 時，橫切面 x 相對於平衡位置的位移。常數 $c^2 = gE/\rho$，其中 g 爲重力加速度（Acceleration due to gravity）。E 爲彈性係數（Modulus of elasticity）（應力除以應變），和橫樑本身的性質有關，而 ρ 則爲橫樑的密度（單位體積的質量）。

此方程式的形式和繩之振動的方程式是相同的。

4. 橫樑的橫振動

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0$$

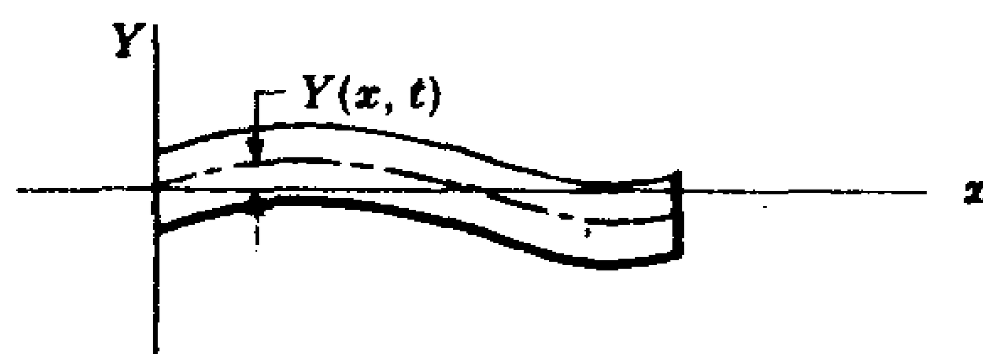


圖 8-3

此方程式描述橫樑（位於 x 軸上，見圖 8-3）在橫向（即垂直於 x 軸）的振動，其中 $Y(x, t)$ 爲在任意時間 t 時，任意點 x 的橫向位移或撓度。常數 b^2 等於 EIg/ρ，其中 E 爲彈性係數，I 爲任意橫截面對 x 軸所產生的慣性矩，g 爲重力加速度，而 ρ 則爲單位長度的質量。若對橫樑施以橫向之外力 $F(x, t)$ 時，則原方程式的等號右端應修正爲 $b^2 F(x, t)/EI$。

5. 圓柱體內的熱傳導

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)$$

$U(r, t)$ 代表任意時間 t 時，在圓柱體內距中心軸 r 處的溫度。在此假設熱量只能沿徑向傳播。

6. 傳輸線

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= -RI - L\frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -GE - C\frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}}$$

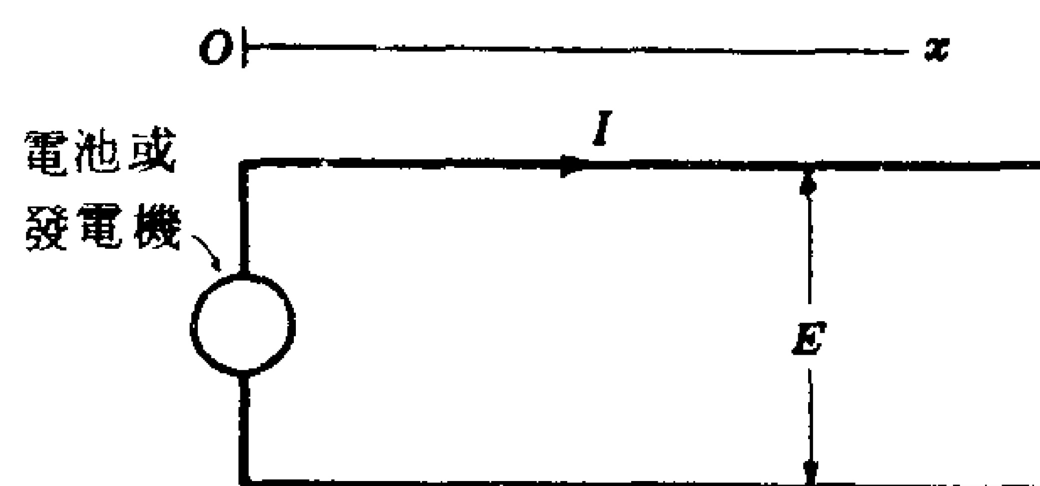


圖 8-4

此為在傳輸線（見圖 8-4）中，電流 I 及電壓 E 在任意點 x 及任意時間 t 的聯立方程式。常數 R，L，G，C 分別是單位長度的電阻、電感、電導及電容。端點 $x=0$ 稱為發送端（Sending end），而其他的 x 值均可視為接收端（Receiving end）。

8-3 二維及三維的問題

上述的偏微分方程式，有許多可推廣，並用來解 2 維或 3 維的問題。例如，若 $Z(x, y, t)$ 代表在任意時間 t，xy 平面上之薄膜在任一點 (x, y) 的橫向位移，則此薄膜之橫向振動（假設振幅很小）可以下列方程式表示：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

同理，三維中之薄膜橫振動方程式為

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) = a^2\nabla^2\phi \tag{2}$$

其中 $\nabla^2\phi$ 稱為 $\phi(x, y, z, t)$ 的拉卜拉士式（Laplacian）。

在三維中的熱傳導方程式為（假設熱傳導係數，比熱及密度均為常數）

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = k\nabla^2 U \tag{3}$$

若為恒溫狀態，此時 U 不隨時間而變，即 $\partial U/\partial t = 0$，故方程式為

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U = 0 \tag{4}$$

上式稱為拉卜拉士方程式（Laplace's equation），亦為電荷（或質量）在沒有電荷（或質量）的空間所造成之電位（或重力位能）的方程式。

8·4 以拉卜拉士變換解邊界值問題

應用拉卜拉士變換（對 t 或對 x ）於一維的邊界值問題，可使偏微分方程式（或方程組）轉化成常微分方程式，故解此常微分方程式，再取反拉氏變換，即可求得原方程式之解。

對於二維的問題，可經由兩次拉氏變換（例如，先對 t ，再對 x ）而得到常微分方程式，欲求得原方程式之解，也必須經過**雙重反變換**（Double inversion），此過程通常稱爲**多重拉氏變換**（Iterated Laplace tranaformation）。類似的方法亦可應用於三維（或更高維次）的問題。邊界值問題亦可由傅氏變換及拉氏變換兩者共同解之。

習題與解答

熱傳導

8.1．一半無限大固體 $x>0$（見圖8-5），最初溫度爲零。在 $t=0$ 時，一恒溫物質（溫度爲 $U_0>0$）置於平面 $x=0$ ，求其後任意時間 $t>0$ 時，任意點之溫度爲何？

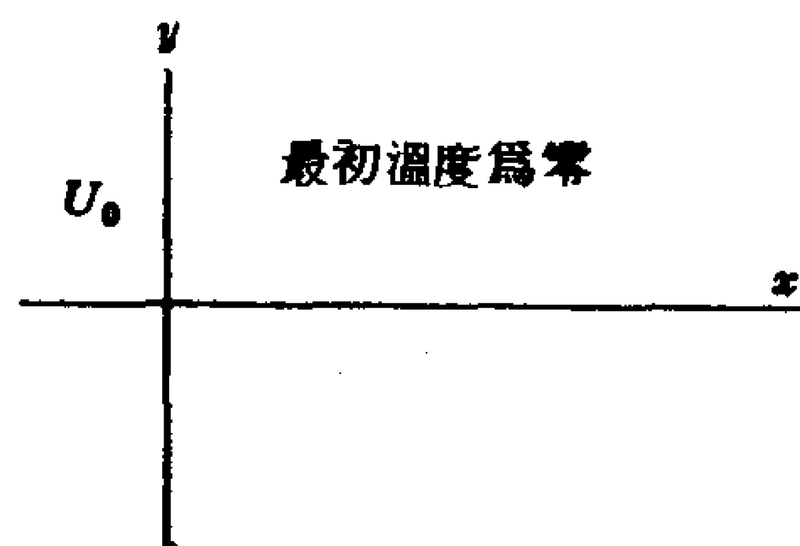


圖8-5

解 欲求得任意點 x 及任意時間 t 的溫度 $U(x,t)$，其對應之邊界值問題爲

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\qquad x>0,\ t>0$$

$$U(x,0)=0,\qquad U(0,t)=U_0,\qquad |U(x,t)|<M$$

最後一個條件表示，對所有的 x 及 t ，溫度均爲有界。

取拉氏變換，得

$$su-U(x,0)=k\frac{d^2u}{dx^2}\quad 即\quad \frac{d^2u}{dx^2}-\frac{s}{k}u=0 \tag{1}$$

其中
$$u(0,s)=\mathcal{L}\{U(0,t)\}=\frac{U_0}{s} \tag{2}$$

且 $u=u(x,s)$ 必須爲有界

解(1)式，得

$$u(x,s)=c_1e^{\sqrt{s/k}\,x}+c_2e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

取 $c_1 = 0$，以使得當 $x \to \infty$ 時，u 爲有界，故

$$u(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} \tag{3}$$

由(2)式得 $c_2 = U_0 / s$，故

$$u(x, s) = \frac{U_0}{s} e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

由第 7 章第 9 題及第 10 題，可得

$$U(x, t) = U_0 \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt}) = U_0\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2}\,du\right\}$$

8.2 若在 $t = 0$ 時，加入恒溫物質之溫度爲 $G(t)$，$t > 0$，試重做第一題。

圖 在此情況下的邊界值問題和上一題完全相同，只不過邊界條件 $U(0, t) = U_0$ 須改爲 $U(0, t) = G(t)$。若 $G(t)$ 的拉氏變換爲 $g(s)$，則由第 1 題(3)式可知 $c_2 = g(s)$，故

$$u(x, s) = g(s)\, e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

由第 7 章第11 題，得

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s/k}\,x}\} = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} t^{-3/2} e^{-x^2/4kt}$$

故由摺積定理可得，

$$U(x, t) = \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} u^{-3/2} e^{-x^2/4ku}\, G(t-u)\, du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{kt}}^{\infty} e^{-v^2}\, G\left(t - \frac{x^2}{4kv^2}\right) dv$$

其中用到代換式 $v^2 = x^2 / 4ku$。

8.3 一木棒之長度爲 l（見圖8-6），其最初溫度爲 U_0。$t = 0$ 時，在端點 $x = l$ 加上一恒定溫度 U_1，而在另一端點 $x = 0$ 則爲絕熱（Insulated）。假設整支木棒的表面（除了 $x = l$）均絕熱，試求在其後任意時間 $t > 0$ 時，任意點 x 的溫度。



圖 8-6

圖 邊界值問題爲

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$U(x,0) = U_0, \quad U_x(0,t) = 0, \quad U(l,t) = U_1$$

取拉氏變換得，

$$su - U(x,0) = k\frac{d^2u}{dx^2} \quad 即 \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} = -\frac{U_0}{k} \tag{1}$$

$$u_x(0,s) = 0, \quad u(l,s) = \frac{U_1}{s} \tag{2}$$

(1)式之一般解爲

$$u = c_1 \cosh\sqrt{s/k}\,x + c_2 \sinh\sqrt{s/k}\,x + \frac{U_0}{s}$$

由(2)式的第一條件式，可知 $c_2 = 0$ ，故

$$u = c_1 \cosh\sqrt{s/k}\,x + \frac{U_0}{s}$$

再由(2)的第二條件式可得

$$c_1 \cosh\sqrt{s/k}\,l + \frac{U_0}{s} = \frac{U_1}{s} \quad 即 \quad c_1 = \frac{U_1 - U_0}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}$$

故
$$u(x,s) = \frac{U_0}{s} + (U_1 - U_0)\frac{\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}$$

等號右端第一項的反拉氏變換爲 U_0，而由複數反變換公式，可得第二項的反拉氏變換爲（暫不考慮常數 $U_1 - U_0$ ）：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}\frac{\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\,ds$$

如同第 7 章第 13 題，上式即爲被積函數之所有極點的留數和，而極點（均爲單極點）爲

$$s = 0, \quad \sqrt{s/k}\,l = (n - \tfrac{1}{2})\pi i \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

即
$$s = 0, \quad s = -\frac{(2n-1)^2\pi^2 k}{4l^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

在 $s = 0$ 的留數爲 $\lim_{s\to 0}(s)\left(\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right) = 1$

在 $s = -\frac{(2n-1)^2\pi^2 k}{4l^2} = s_n$ 的留數爲

$$\lim_{s\to s_n} (s-s_n)\left(\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right)$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_n}\frac{s-s_n}{\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right\}\left\{\lim_{s\to s_n}\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_n}\frac{1}{(\sinh\sqrt{s/k}\,l)(l/2\sqrt{ks})}\right\}\left\{\lim_{s\to s_n}\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s}\right\}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4l^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

其中用到羅哈士比托規則。故

$$U(x,t) = U_1 + \frac{4(U_1-U_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4l^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

振動之繩

8.4 一無限長之細繩（端點爲 $x = 0$）最初靜止於 x 軸。端點 $x = 0$ 受到外力作用，其週期性的橫向位移爲 $A_0 \sin\omega t$，$t > 0$。試求在任意時間 t，繩上任意點的位移。

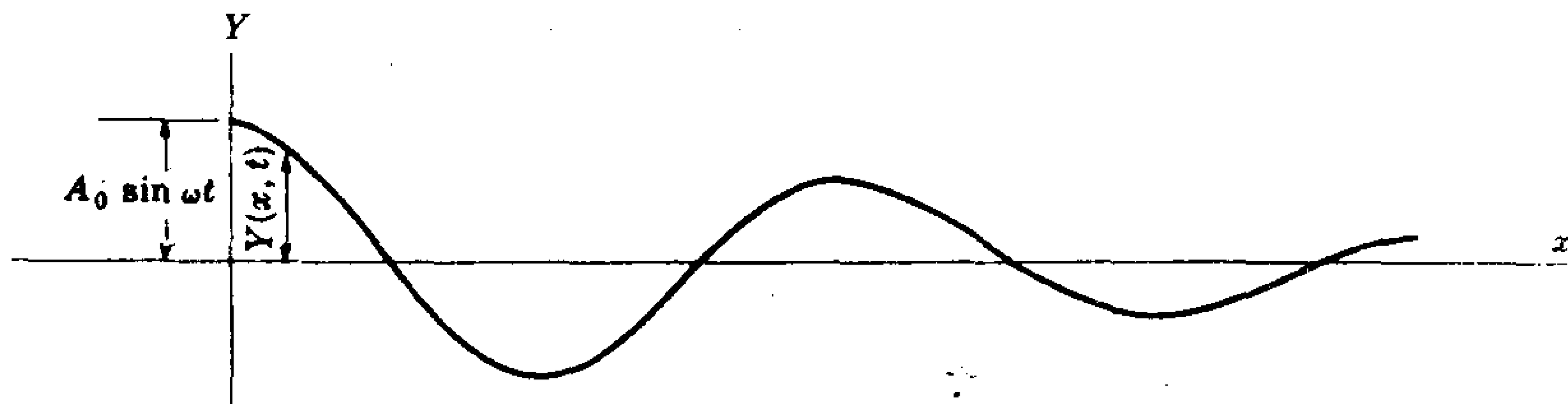


圖 8-7

答　若 $Y(x,t)$ 代表在任意點 x 及任意時間 t 的橫向位移，則邊界值問題爲

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x>0,\ t>0 \tag{1}$$

$$Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y(0,t) = A_0\sin\omega t, \quad |Y(x,t)| < M \tag{2}$$

其中最後一個條件式說明此位移爲有界。

取拉氏變換，並令 $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$

$$s^2 y - sY(x,0) - Y_t(x,0) = a^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad 即 \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}y = 0 \tag{3}$$

$$y(0,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad y(x,s) \text{ 有界} \tag{4}$$

此微分方程式之通解為

$$y(x,s) = c_1 e^{sx/a} + c_2 e^{-sx/a}$$

因 $y(x, s)$ 有界，取 $c_1 = 0$，故

$$y(x,s) = c_2 e^{-sx/a}$$

由(4)式中第一條件式得 $c_2 = A_0\omega/(s^2+\omega^2)$ 故

$$y(x,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2} e^{-sx/a}$$

$$Y(x,t) = \begin{cases} A_0 \sin \omega(t - x/a) & t > x/a \\ 0 & t < x/a \end{cases}$$

此式之物理意義為，繩上之任一點 x，在 $t = x/a$時才開始振動，且其運動方式和端點 $x = 0$ 完全相同，只不過時間落後 x/a。常數 a 在此為繩波前進之速度。

8.5 一拉緊之柔軟細繩固定於 $x = 0$ 及 $x = l$。在時間 $t = 0$ 時，此細繩之外形被固定為 $F(x) = \mu x(l-x)$（μ 為一常數），然後釋放。試求任意時間 $t > 0$ 時，繩上任意點 x 的位移。

答 邊界值問題為

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(l,t) = 0, \quad Y(x,0) = \mu x(l-x), \quad Y_t(x,0) = 0$$

取拉氏變換，並令 $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$，可得

$$s^2 y - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} y = -\frac{\mu s x(l-x)}{a^2} \tag{1}$$

$$y(0,s) = 0, \quad y(l,s) = 0 \tag{2}$$

(1)式的一般解為

$$y = c_1 \cosh \frac{sx}{a} + c_2 \sinh \frac{sx}{a} + \frac{\mu x(l-x)}{s} - \frac{2a^2\mu}{s^3} \tag{3}$$

再由(2)，可得

$$c_1 = \frac{2a^2\mu}{s^3}, \qquad c_2 = \frac{2a^2\mu}{s^3}\left(\frac{1-\cosh sl/a}{\sinh sl/a}\right) = -\frac{2a^2\mu}{s^3} \tanh sl/2a \tag{4}$$

故(3)式變為 $$y = \frac{2a^2\mu}{s^3}\frac{\cosh s(2x-l)/2a}{\cosh sl/2a} + \frac{\mu x(l-x)}{s} - \frac{2a^2\mu}{s^3}$$

利用留數定理，可得（見第7章第17題）

$$\begin{aligned} Y(x,t) &= a^2\mu\left\{t^2 + \left(\frac{2x-l}{2a}\right)^2 - \left(\frac{l}{2a}\right)^2\right\} \\ &\quad - \frac{32a^2\mu}{\pi^3}\left(\frac{l}{2a}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi(2x-l)}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l} \\ &\quad + \mu x(l-x) - a^2\mu t^2 \end{aligned}$$

即 $$Y(x,t) = \frac{8\mu l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}$$

橫樑的振動

8.6 一橫樑（長度 l，端點 $x=0$ 為固定端，見圖8-8）最初靜止，一單位面積為F_0之固定外力縱向施於自由端，求任意時間 $t>0$ 時，任意點 x 的縱向位移。

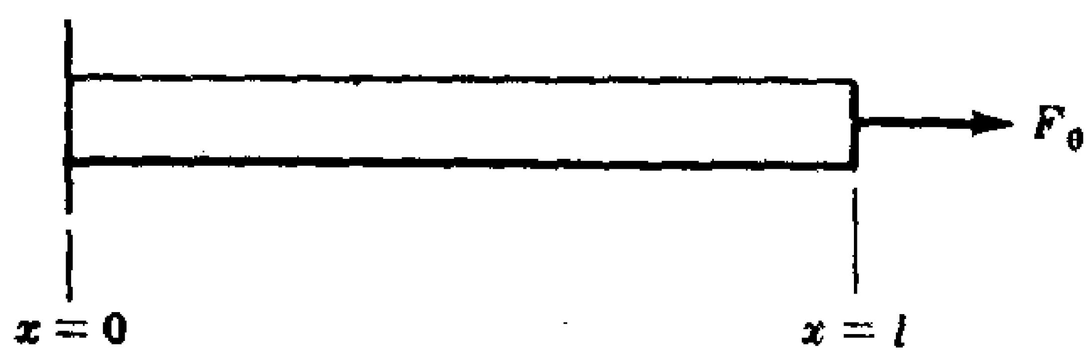


圖 8-8

解 若$Y(x,t)$代表任意時間 t，橫樑內任意點 x 的縱向位移，則邊界值問題為

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y(0,t) = 0, \quad Y_x(l,t) = F_0/E$$

其中E為楊氏係數。

取拉氏變換，並令 $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$，得

$$s^2y(x,s) - sY(x,0) - Y_t(x,0) = c^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}y = 0$$

$$y(0,s) = 0, \quad y_x(l,s) = F_0/Es \tag{1}$$

解上述微分方程式，得

$$y(x,s) = c_1\cosh(sx/c) + c_2\sinh(sx/c)$$

由(1)式中第一條件式，得 $c_1=0$ 故

$$y(x,s) = c_2\sinh(sx/c)$$
$$y_x(x,s) = c_2(s/c)\cosh(sx/c)$$

由(2)式中第二條件式，得

$$c_2\,(s/c)\cosh(sl/c) = F_0/Es \quad 即 \quad c_2 = \frac{cF_0}{Es^2\cosh(sl/c)}$$

$$y(x,s) = \frac{cF_0}{E}\cdot\frac{\sinh(sx/c)}{s^2\cosh(sl/c)} \tag{2}$$

再由第 7 章第 14 題，可得

$$Y(x,t) = \frac{F_0}{E}\left[x + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi ct}{2l}\right] \tag{3}$$

8.7 在上題中，試求自由端 $x = l$ 的位移（爲 t 的函數）。

圖 令 $x = l$ 代入第 6 題(2)式，得

$$y(l,s) = \frac{cF_0}{E}\frac{\sinh(sl/c)}{s^2\cosh(sl/c)}$$

由第 1 章第 92 題或附錄 B 134 條，可知此爲三角波（圖 8-9）的拉氏變換，故在端點 $x = l$ 的位移（爲 t 的函數）即爲圖 8-9。

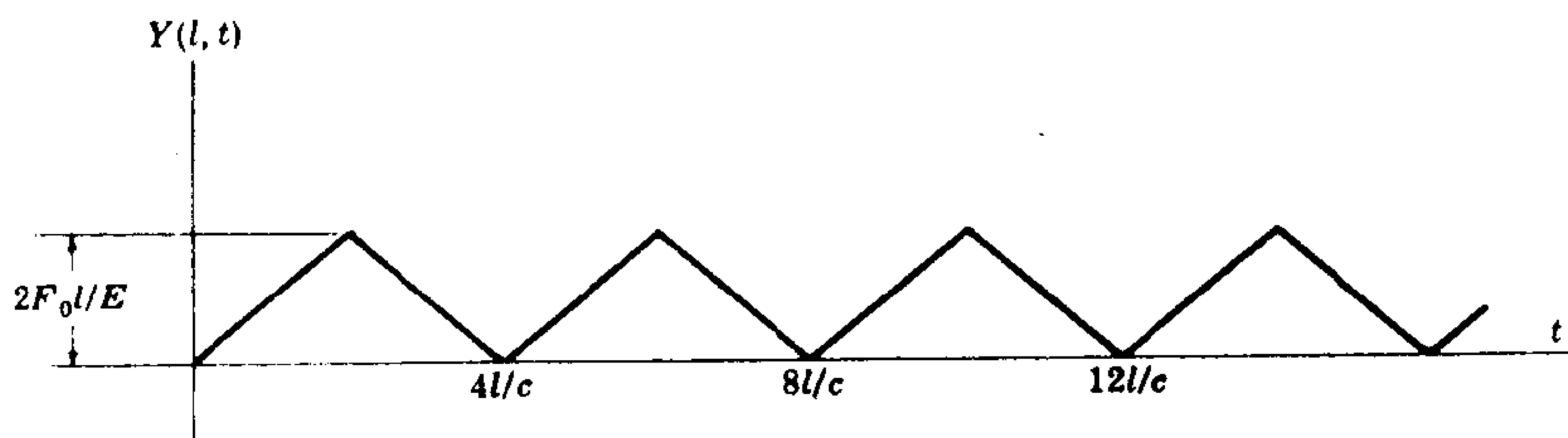


圖 8-9

8.8 一半無限長之橫樑最初靜止於 x 軸上。在 $t = 0$ 時，使其端點 $x = 0$ 之橫向位移爲 h，試求在任意時間 $t > 0$ 時，任意時點 x 之橫位移 $Y(x, t)$。

圖 對應之邊界值問題爲

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \qquad x > 0,\ t > 0 \tag{1}$$

$$Y(x,0) = 0,\quad Y_t(x,0) = 0,\quad Y(0,t) = h,\quad Y_{xx}(0,t) = 0,\quad |Y(x,t)| < M \tag{2}$$

取拉氏變換，得

$$s^2 y(x,s) - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) + b^2\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \quad 即 \quad \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{s^2}{b^2}y = 0$$

$$y(0,s) = h/s,\quad y_{xx}(0,s) = 0,\quad y(x,s)\ 爲有界 \tag{3}$$

此微分方程式之解爲

$$y(x,s) = e^{\sqrt{s/2b}\,x}(c_1\cos\sqrt{s/2b}\,x + c_2\sin\sqrt{s/2b}\,x) + e^{-\sqrt{s/2b}\,x}(c_3\cos\sqrt{s/2b}\,x + c_4\sin\sqrt{s/2b}\,x)$$

因 $y(x,s)$ 爲有界，取 $c_1 = c_2 = 0$ 故

$$y(x,s) = e^{-\sqrt{s/2b}\,x}(c_3\cos\sqrt{s/2b}\,x + c_4\sin\sqrt{s/2b}\,x)$$

由(3)式的第一及第二邊界條件，可求得 $c_4 = 0$ 及 $c_3 = h/s$ 故

$$y(x,s) = \frac{h}{s}e^{-\sqrt{s/2b}\,x}\cos\sqrt{s/2b}\,x$$

由複數反變換公式，可得上式之反拉氏變換爲

$$Y(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{he^{st-\sqrt{s/2b}\,x}\cos\sqrt{s/2b}\,x}{s}\,ds$$

因 $s=0$ 爲分枝點，故我們用圖 8-10 的積分路徑來求上式積分值。利用類似第 7 章第 9 題的做法，得（爲簡潔起見，暫時省略被積函數）

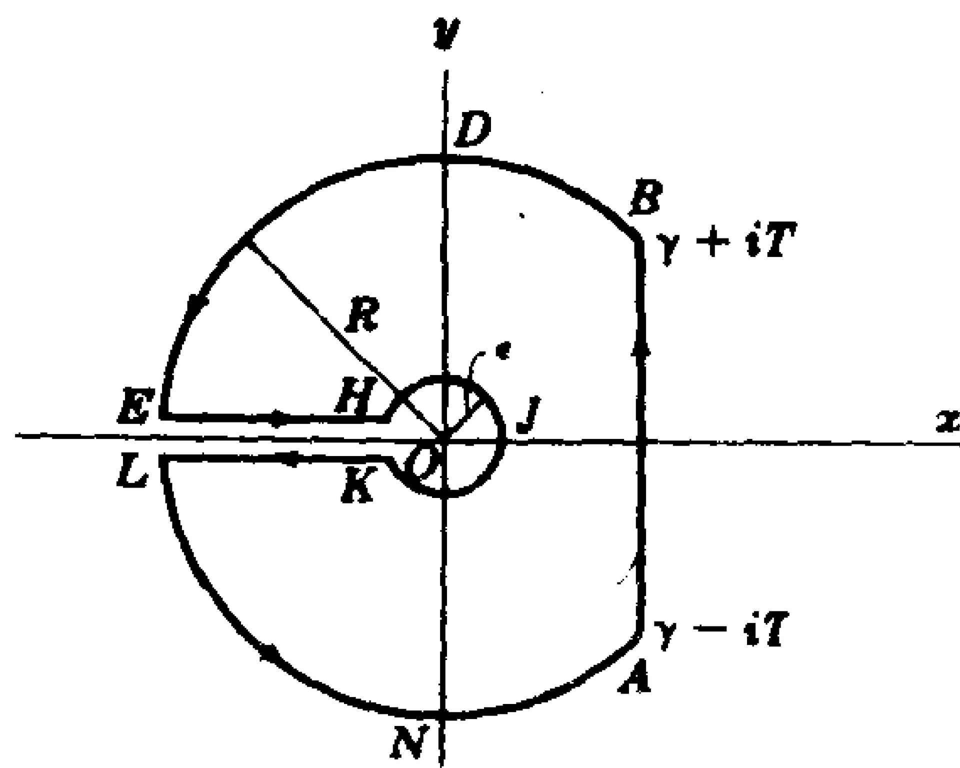


圖 8-10

$$Y(x,t) = -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH} + \int_{HJK} + \int_{KL}\right\} \tag{4}$$

沿 EH 時，$s = ue^{\pi i}$，$\sqrt{s} = i\sqrt{u}$ 即

$$\int_{EH} = \int_{R}^{\epsilon}\frac{he^{-ut-i\sqrt{u/2b}\,x}\cosh\sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du$$

沿 KL 時，$s = ue^{-\pi i}$，$\sqrt{s} = -i\sqrt{u}$ 即

$$\int_{KL} = \int_{\epsilon}^{R}\frac{he^{-ut+i\sqrt{u/2b}}\cosh\sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du$$

沿 HJK 時，$s = \epsilon e^{i\theta}$ 即

$$\int_{HJK} = \int_{\pi}^{-\pi} h\,e^{\epsilon e^{i\theta}t-\sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}\,x}\cos\sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}\,x\,d\theta$$

故(4)式變爲

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ut}\sin\sqrt{u/2b}\,x\,\cosh\sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du\right\}$$

令 $u/2b=v^2$，上式可寫成

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-2bv^2t}\sin vx\cosh vx}{v}\,dv\right\}$$

上式可用輻來乃耳積分（Fresnel integrals）寫成（見66題及附錄B第10及11條）

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{bt}}(\cos w^2 + \sin w^2)\,dw\right\}$$

傳輸線

8.9 有一半無限長之傳輸線，假設其單位長度上的電感及電導均可省略，且在發送端 $x=0$ 加上一電壓如下

$$E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0<t<T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

試求任意時間 $t>0$ 時，任意點 $x>0$ 之電壓 $E(x,t)$ 及電流 $I(x,t)$。

圖 令 $L=0$ 及 $G=0$ 代入傳輸線方程式。得

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -RI, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial E}{\partial t} \tag{1}$$

邊界條件爲

$$E(x,0) = 0, \quad I(x,0) = 0, \quad E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0<t<T \\ 0 & t>T \end{cases}, \quad |E(x,t)| < M$$

取拉氏變換，並令 $\mathcal{L}\{E(x,t)\} = \tilde{E}(x,s)$, $\mathcal{L}\{I(x,t)\} = \tilde{I}(x,s)$，得

$$\frac{d\tilde{E}}{dx} = -R\tilde{I}, \quad \frac{d\tilde{I}}{dx} = -C\{s\tilde{E} - E(x,0)\}$$

$$\frac{d\tilde{E}}{dx} = -R\tilde{I}, \quad \frac{d\tilde{I}}{dx} = -Cs\tilde{E} \tag{2}$$

將(2)式中第一式對 x 微分，並將第二式代入，可消去 I 而得。

$$\frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} = -R\frac{d\tilde{I}}{dx} = RCs\tilde{E} \quad 即 \quad \frac{d^2\tilde{E}}{dx^2} - RCs\tilde{E} = 0 \tag{3}$$

(3)式之一般解爲

$$\tilde{E}(x,s) = c_1 e^{\sqrt{RCs}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{RCs}\,x}$$

因 $E(x,s)$ 爲有界，取 $c_1=0$，故

$$\tilde{E}(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{RCs}\,x}, \tag{4}$$

令$E(0,t)=G(t)$且$\mathcal{L}\{E(0,t)\}=\tilde{E}(0,s)=g(s)$，故由(4)式可得$c_2=g(s)$即

$$\tilde{E}(x,s) = g(s)\,e^{-\sqrt{RCs}\,x} \tag{5}$$

如同第 2 題，由摺積定理得

$$E(x,t) = \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} G(t-u)\,du$$

但因

$$G(t-u) = \begin{cases} E_0 & 0 < t-u < T \text{ 或 } t-T = u < t \\ 0 & t-u > T \qquad u < t-T \end{cases}$$

故當 $t>T$時，

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \int_{t-T}^{t} \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} E_0\,du \\ &= \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2}\,dv \qquad \text{(letting } RCx^2/4u = v^2) \\ &= E_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2}\,dv - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv \right\} \\ &= E_0 \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right) \right\} \end{aligned}$$

$0<t<T$時，

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} E_0\,du = \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2}\,dv \\ &= E_0\{1 - \operatorname{erf}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})\} \\ &= E_0 \operatorname{erfc}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}) \end{aligned}$$

由 $I = -\frac{1}{R}\frac{\partial E}{\partial x}$，故將$E$對$x$微分，並乘上$-1/R$即可得

$$I(x,t) = \begin{cases} \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\dfrac{C}{R}}\, t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} & 0 < t < T \\ \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\dfrac{C}{R}} \left[t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} - (t-T)^{-3/2} e^{-RCx^2/4(t-T)} \right] & t > T \end{cases}$$

其他各類問題

8.10 (a) 解下列邊界值問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x>0,\ t>0$$

$$U(x,0) = U_0, \quad U_x(0,t) = -\alpha U(0,t), \quad |U(x,t)| < M$$

(b) 試以熱流觀點，解釋上述問題。

圖 此問題乃由下列現象產生：考慮一半無限大之導熱物質，其最初之溫度爲U_0，並將熱流傳導至$x<0$之介質，而介質之溫度爲零。假設熱流傳導的速度正比於平面$x=0$及介質$x<0$之溫度差，即

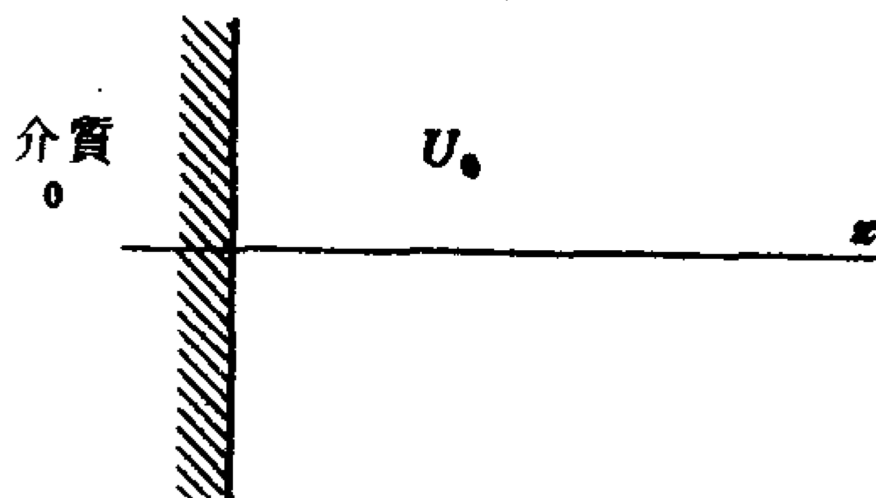


圖 8-11

$$U_x(0,t) = -\alpha[U(0,t)-0] = -\alpha U(0,t)$$

欲求上式之解，取拉氏變換得

$$su - U_0 = k\frac{d^2u}{dx^2} \quad 即 \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} = -\frac{U_0}{k} \tag{1}$$

$$u_x(0,s) = -\alpha u(0,s), \qquad u(x,s)\ 爲有界 \tag{2}$$

上述微分方程式之通解爲

$$u(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

因$u(x,s)$爲有界，取$c_1=0$，故

$$u(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

由(2)中第一條件式，得 $c_2 = \dfrac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s}-\alpha)}$ 故

$$u(x,s) = \frac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s}-\alpha)}e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

再由複數反變換公式，得

$$U(x,t) = U_0 + \alpha U_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s}-\alpha)}\right\}$$

$$= U_0 + \frac{\alpha U_0}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st-\sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s}-\alpha)}\,ds$$

如同問題8，可得（暫時省略被積函數不寫），

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st-\sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s}-\alpha)}\,ds = -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH}+\int_{HJK}+\int_{KL}\right\} \tag{3}$$

沿 EH 時，$s = ue^{\pi i}$，$\sqrt{s} = i\sqrt{u}$ 即

$$\int_{EH} = \int_R^{\epsilon}\frac{e^{-ut-i\sqrt{u/k}\,x}}{u(i\sqrt{u}-\alpha)}\,du$$

沿 KL 時，$s = ue^{-\pi i}$，$\sqrt{s} = -i\sqrt{u}$ 即

$$\int_{KL} = \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-ut+i\sqrt{u/k}\,x}}{u(-i\sqrt{u}-\alpha)}\,du$$

沿 HJK 時，$s = \epsilon e^{i\theta}$ 即

$$\int_{HJK} = \int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}t-\sqrt{\epsilon e^{i\theta}/k}\,x}}{\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}-\alpha}\,i\,d\theta$$

將上面各式代入(3)，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st-\sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s}-\alpha)}\,ds = -\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ut}}{u}\left[\frac{\sqrt{u}\cos x\sqrt{u}-\alpha\sin x\sqrt{u}}{u+\alpha^2}\right]du$$

故
$$U(x,t) = \frac{\alpha U_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ut}}{u}\left[\frac{\sqrt{u}\cos x\sqrt{u}-\alpha\sin x\sqrt{u}}{u+\alpha^2}\right]du$$
$$= \frac{2\alpha U_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-v^2t}}{v}\left[\frac{v\cos xv-\alpha\sin xv}{v^2+\alpha^2}\right]dv$$

其中用到代換式 $u = v^2$。

8.11 一拉緊之柔軟細繩，固定於 x 軸上之 $x = 0$ 及 $x = 1$。在時間 $t = 0$ 時，細繩之形狀為 $F(x)$，$0 < x < 1$，並將之釋放。求其後任意時間 $t > 0$ 時，繩上之任意點 x 之位移。

圖 對應之邊界值問題為

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0<x<1,\ t>0 \tag{1}$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(1,t) = 0, \quad Y(x,0) = F(x), \quad Y_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

為解題方便，先不考慮(1)式，而以下式代之

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

等解得上式之 $Y(x,t)$ 後，再以 at 替代 t，即可得(1)式之解（參見49題）

取拉氏變換，得

$$s^2 y - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - s^2 y = -s\,F(x) \tag{3}$$

$$y(0,s) = 0, \quad y(1,s) = 0 \tag{4}$$

(3)式之通解爲（見第 3 章第 8 題）

$$y(x,s) = c_1 \cosh sx + c_2 \sinh sx - \int_0^x F(u) \sinh s(x-u)\,du$$

由(4)式之第一條件式，可得 $c_1 = 0$ ，故

$$y(x,s) = c_2 \sinh sx - \int_0^x F(u) \sinh s(x-u)\,du \tag{5}$$

再由(4)之第二條件式，得

$$0 = c_2 \sinh s - \int_0^1 F(u) \sinh s(1-u)\,du$$

$$c_2 = \int_0^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u)}{\sinh s}\,du$$

故(5)式變爲

$$y(x,s) = \int_0^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s}\,du - \int_0^x F(u) \sinh s(x-u)\,du$$

上式之第一積分式可寫成兩個積分式之和，一從 0 積分至 x ，另一從 x 積分至 1 ，故

$$y(x,s) = \int_0^x F(u) \left\{ \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s} - \sinh s(x-u) \right\} du + \int_x^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s}\,du$$

$$= \int_0^x F(u) \frac{\sinh s(1-x) \sinh su}{\sinh s}\,du + \int_x^1 F(u) \frac{\sinh s(1-u) \sinh sx}{\sinh s}\,du$$

我們現在求反拉氏變換。由複數反變換公式，上式右端第一項可變換爲

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \left\{ \int_0^x F(u) \frac{\sinh s(1-x) \sinh su}{\sinh s}\,du \right\} ds$$

因上式等於在單極點 $s = n\pi i$ 的留數和，故上式即爲

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n\pi i t} \int_0^x F(u) \frac{\sin n\pi(1-x) \sin n\pi u}{-\cos n\pi}\,du = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^x F(u) \sin n\pi u\,du \right\} \sin n\pi x \cos n\pi t$$

同理，第二項之反變換爲

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_x^1 F(u) \sin n\pi u\,du \right\} \sin n\pi x \cos n\pi t$$

第一項和第二項相加，得

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^1 F(u)\sin n\pi u\, du\right\}\sin n\pi x\cos n\pi t$$

以 at 取代 t，得

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^1 F(u)\sin n\pi u\, du\right\}\sin n\pi x\cos n\pi at$$

8.12 一無限長之圓柱體，半徑爲 r，最初之溫度爲 T。在 $t=0$ 時，在其表面保持溫度爲 0 ℃，求其後任意時間 t 時，圓柱體內任意點之溫度。

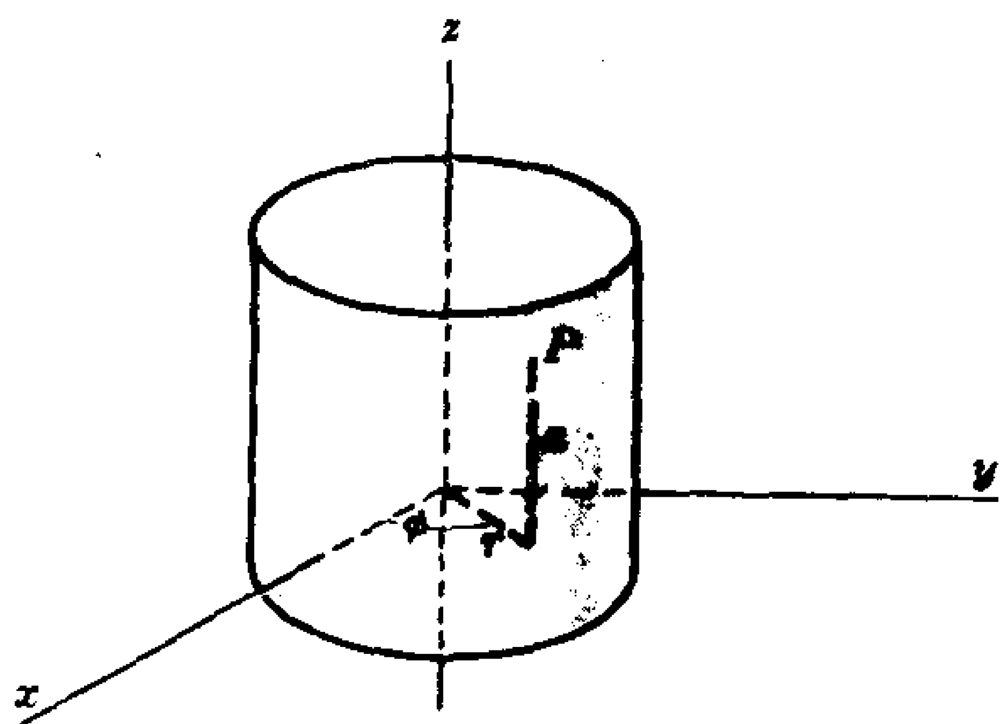


圖 8-12

答 若以圓柱座標（r，ϕ，z）代表圓柱體內任一點之位置，且此圓柱體之中心軸和 z 軸重合（見圖 8-12），則可看出溫度值和 ϕ 及 z 均無關，故可以 $U(r,t)$ 表示。對應之邊界值問題爲

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) \qquad 0<r<1 \tag{1}$$

$$U(1,t)=0,\quad U(r,0)=T,\quad |U(r,t)|<M \tag{2}$$

爲解題方便，先不考慮(1)式，以下式代之

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}$$

最後在解答中再以 kt 代 t 即可。

取拉氏變換，得

$$su - U(r,0) = \frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr} \quad \text{即} \quad \frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - su = -T$$

$$u(1,s)=0, \qquad u(r,s) \text{ 爲有界}$$

上式之一般解可用貝色函數表爲

$$u(r,s) = c_1 J_0(i\sqrt{s}\,r) + c_2 Y_0(i\sqrt{s}\,r) + \frac{T}{s}$$

當 $r\to 0$ 時，$Y_0(i\sqrt{s}\,r)$ 爲有界，故取 $c_2=0$。

$$u(r,s) = c_1 J_0(i\sqrt{s}\,r) + \frac{T}{s}$$

再由 $u(1,s)=0$，得

$$c_1 J_0(i\sqrt{s}) + \frac{T}{s} = 0 \quad 即 \quad c_1 = -\frac{T}{s J_0(i\sqrt{s})}$$

故

$$u(r,s) = \frac{T}{s} - \frac{T J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s J_0(i\sqrt{s})}$$

由反變換公式可得

$$U(r,t) = T - \frac{T}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s J_0(i\sqrt{s})}\,ds$$

因 $J_0(i\sqrt{s})$ 之單極點出現在 $i\sqrt{s}=\lambda_1$，λ_2，$\cdots \lambda_n \cdots$，故上式被積函數之單極點爲 $s=-\lambda_n^2$，$n=1,2,3\cdots$ 及 $s=0$。又上式被積函數滿足第 7 章第 2 題中的條件，故可使用留數定理解之。

在 $s=0$ 時，被積函數的留數爲

$$\lim_{s\to 0} s\frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s J_0(i\sqrt{s})} = 1$$

在 $s=-\lambda_n^2$ 時，被積函數的留數爲

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to -\lambda_n^2} (s+\lambda_n^2)\frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s J_0(i\sqrt{s})} &= \left\{\lim_{s\to -\lambda_n^2} \frac{s+\lambda_n^2}{J_0(i\sqrt{s})}\right\}\left\{\lim_{s\to -\lambda_n^2} \frac{e^{st} J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s}\right\} \\
&= \left\{\lim_{s\to -\lambda_n^2} \frac{1}{J_0'(i\sqrt{s})\, i/2\sqrt{s}}\right\}\left\{\frac{e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{-\lambda_n^2}\right\} \\
&= -\frac{2e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}
\end{aligned}$$

其中我們在計算極限時，用到羅哈士比托規則，及等式 $J_0'(u)=-J_1(u)$。故

$$\begin{aligned}
U(r,t) &= T - T\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}\right\} \\
&= 2T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}
\end{aligned}$$

以 kt 取代 t，得所求之解爲

$$U(r,t) = 2T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-k\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

8.13 一半無限大之絕熱棒和 x 軸重合（$x>0$），且其最初之溫度爲零。在 $t=0$ 時，一熱量瞬時產生於 $x=a$（$a>0$）處，求任意時間 $t>0$ 時，棒中任意點 x 之溫度爲何？

解 此棒之熱傳導方程式為

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x>0,\ t>0 \tag{1}$$

因一熱量瞬時產生於 $x=a$ 處，故可以下列之邊界條件表示

$$U(a,t) = Q\,\delta(t) \tag{2}$$

其中 Q 為常數，$\delta(t)$ 為脈衝函數。又因最初溫度為零，且溫度值必為有界，故

$$U(x,0) = 0, \qquad |U(x,t)| < M \tag{3}$$

取(1)及(2)式之拉氏變換，並利用(3)之第一條件式，可得

$$su - U(x,0) = k\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{即} \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} = 0 \tag{4}$$

$$u(a,s) = Q \tag{5}$$

由(4)式，可得 $\qquad u(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x}$

由 $u(x,s)$ 為有界，取 $c_1=0$，故

$$u(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} \tag{6}$$

再由(5)式 $\qquad u(a,s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,a} = Q \quad$ 即 $\quad c_2 = Q e^{\sqrt{s/k}\,a}$

故

$$u(x,s) = Q e^{-(x-a)\sqrt{s/k}} \tag{7}$$

利用第 7 章第 11 題，得上式之拉氏反變換（即為所求之溫度）為

$$U(x,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-(x-a)^2/4kt} \tag{8}$$

點 $x=a$ 有時稱為強度 Q 的熱源（A heat source of strength Q）。

8.14 一半無限大之平板，寬度為 π（見圖 8-13），且其表面均絕熱。半無限大邊緣之溫度保持在 0°C，而有限大邊緣之溫度保持在 100°C，並假設最初之溫度為 0°C，求任意時間任意點之溫度。

解 假設擴散係數為 1，則和溫度 $U(x, y, t)$ 相關的邊界值問題為

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$U(0,y,t) = 0 \tag{2}$$

$$U(\pi,y,t) = 0 \tag{3}$$

$$U(x,y,0) = 0 \tag{4}$$

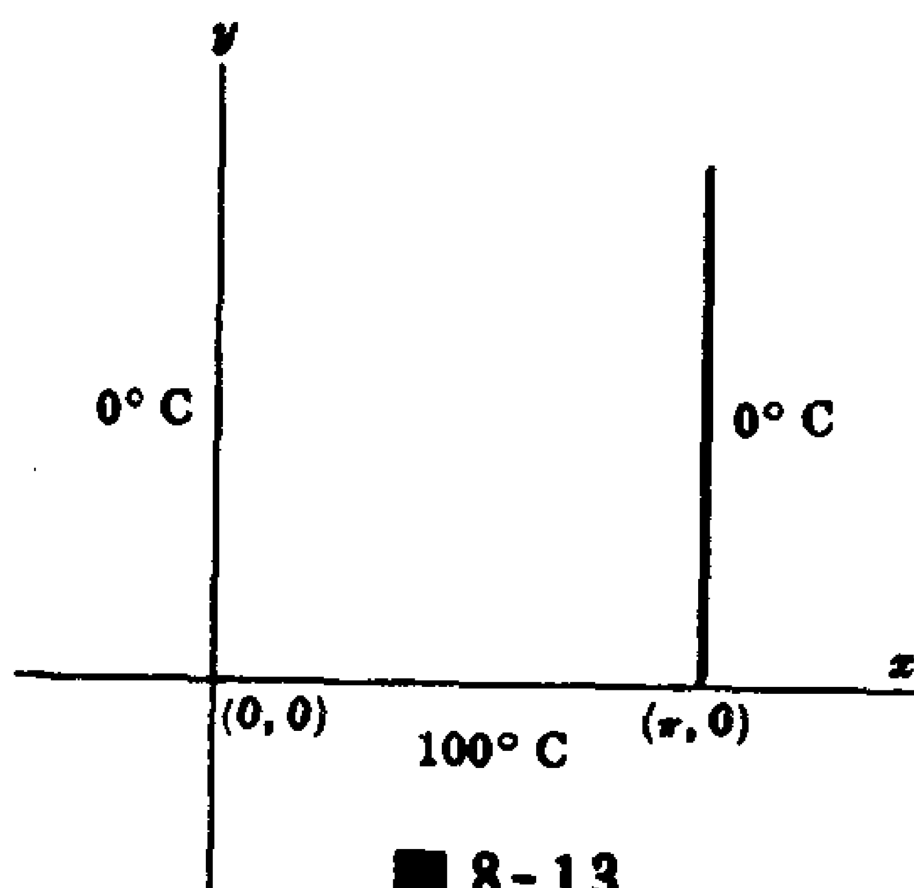


圖 8-13

$$U(x,0,t) = 100 \tag{5}$$

$$|U(x,y,t)| < M \tag{6}$$

其中 $0<x<\pi,\ y>0,\ t>0$

取(1)式之拉氏變換，並利用(4)式，可得（其中 $u=u(x,y,s)=\mathcal{L}\{U(x,y,t)\}$ 。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = su \tag{7}$$

將(7)式乘上 $\sin nx$，並從0到 π 積分之（即取(7)式之正弦變換），得

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin nx\,dx + \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin nx\,dx = \int_0^\pi su\sin nx\,dx$$

令 $\tilde{u}=\int_0^\pi u\sin nx\,dx$, 代入上式，得

$$-n^2\tilde{u} + n\,u(\pi,y,s)\cos n\pi + n\,u(0,y,s) + \frac{d^2\tilde{u}}{dy^2} = s\tilde{u} \tag{8}$$

因(1)，(3)式之拉氏變換為

$$u(0,y,s) = 0,\qquad u(\pi,y,s) = 0$$

故(8)式變為

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dy^2}-(n^2+s)\tilde{u} = 0$$

上式之解為
$$\tilde{u} = A\,e^{y\sqrt{n^2+s}}+B\,e^{-y\sqrt{n^2+s}}$$

當 $y\to\infty$ 時，u 為有界，故取 $A=0$，即

$$\tilde{u} = B\,e^{-y\sqrt{n^2+s}} \tag{9}$$

再由(5)式得

$$\tilde{u}(n,0,s) = \int_0^\pi \frac{100}{s}\sin nx\,dx = \frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)$$

故令 $y=0$ 代入(9)式，得

$$B = \frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)$$

$$\tilde{u} = \frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)e^{-y\sqrt{n^2+s}}$$

由傅立葉正弦反變換公式得

$$u = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)e^{-y\sqrt{n^2+s}}\sin nx \tag{10}$$

我們現在必須求得上式之反拉氏變換。因已知

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s}}\} = \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-y^2/4t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s+n^2}}\} = \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-y^2/4t} e^{-n^2 t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-y\sqrt{s+n^2}}}{s}\right\} = \int_0^t \frac{y}{2\sqrt{\pi v^3}} e^{-y^2/4v} e^{-n^2 v}\, dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2+n^2y^2/4p^2)}\, dp$$

其中用到代換式 $y^2/4v = p^2$。

故在(10)式中利用上式逐項變換之，可得

$$U(x,y,t) = \frac{400}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right) \sin nx \int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2+n^2y^2/4p^2)}\, dp$$

補充題

熱傳導

8.15 一半無限大之物質 $x > 0$，最初之溫度爲零。一固定熱流 A，施於平面 $x = 0$，使得 $-KU_x(0, t) = A$。證明在時間 t 之後，平面 $x = 0$ 之溫度爲 $\frac{A}{K}\sqrt{\frac{kt}{\pi}}$

8.16 求15題中，任意點 x 的溫度。

答 $\frac{A}{K}\{\sqrt{kt/\pi}\, e^{-x^2/4kt} - \frac{1}{2}x \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt})\}$

8.17 一物質 $0 \le x \le l$ 在端點 $x = 0$ 及 $x = l$ 均絕熱。若最初之溫度爲 $ax(l-x)$，其中 a 爲常數。求任意時間 t 時，任意點 x 之溫度。

答 $\frac{al^2}{6} - \frac{al^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-4kn^2\pi^2t/l^2}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{l}$

8.18 (a) 利用拉氏變換，解下列邊界值問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = .25\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 1 \qquad 0 < x < 10,\ t > 0$$

$$U(10,t) = 20, \quad U_x(0,t) = 0, \quad U(x,0) = 50$$

(b) 以熱流觀點解釋此問題。

答　(a)
$$U(x,t) = 220 - 2x^2 + \frac{6400}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/1600}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{20}$$
$$-\frac{120}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/1600}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{20}$$

8.19 (a)　解
$$2\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x>0,\ t>0$$
$$U_x(0,t) = 0, \quad U(x,0) = e^{-x}, \quad U(x,t)\ \text{爲有界}$$

(b)　以熱流觀點解釋此題。

答
$$U(x,t) = e^{t-x} - \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2-x^2/4v^2}\,dv$$

8.20 (a)　一半無限大之物質 $x>0$，在平面 $x=0$ 之溫度保持在 $U_0\cos\omega t$，$t>0$。若最初之溫度均爲零，證明在任意時間 $t>0$ 時，任意點 x 之溫度爲

$$U(x,t) = U_0 e^{-\sqrt{\omega/2k}\,x}\cos(\omega t - \sqrt{\omega/2k}\,x) - \frac{U_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{ue^{-ut}\sin x\sqrt{u/k}}{u^2+\omega^2}\,du$$

(b)　證明在 t 很大時，(a)中之積分值可忽略。

8.21　一半無限大之物質 $x\geq 0$ 最初之溫度爲零。在 $t=0$ 時，平面 $x=0$ 之溫度突然提昇至固定溫度 T_0，並持續了一段時間 t_0，然後溫度再立刻降爲零。證明過了另一段時間 t_0 之後，溫度之最大值發生於 $x=2\sqrt{kt_0\ \ln 2}$ 處，其中 k 爲擴散係數（假設爲常數）。

8.22　在 $t=0$ 時，一半無限大之物質 $x>0$ 的溫度爲零，但有一正弦熱流施於平面 $x=0$，以致於 $-KU_x(0,t)=A+B\sin\omega t$，$t>0$。證明其後任意時間 t 時，平面 $x=0$ 之溫度爲

$$\frac{2\sqrt{k}A}{K\sqrt{\pi}}t^{1/2} + \frac{2B\sqrt{k}\,\omega}{K}\left\{\left(\int_0^{\sqrt{t}}\cos\omega v^2\,dv\right)\sin\omega t - \left(\int_0^{\sqrt{t}}\sin\omega v^2\,dv\right)\cos\omega t\right\}$$

8.23　試求在 22 題中，任意點 $x>0$ 之溫度爲何？

振動之繩

8.24 (a)　解下列邊界值問題

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0<x<\pi,\ t>0$$
$$Y_x(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = h, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0$$

(b) (a)之物理意義爲何？

答 $Y(x,t) = \frac{8h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\sin(n-\frac{1}{2})x\sin(2n-1)t$

8.25 解下列邊界值問題

$$Y_{tt} = Y_{xx} + g \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$$
$$Y(0,t) = 0,\quad Y(\pi,t) = 0,\quad Y(x,0) = \mu x(\pi - x),\quad Y_t(x,0) = 0$$

並解釋其物理意義。

答 $Y(x,t) = \frac{1}{2}gx(\pi - x) + \frac{4(2\mu x - g)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\cos(2n-1)t$

8.26 一拉緊之柔軟細繩固定於兩端點 $x = 0$ 及 $x = l$ 。在 $t = 0$ 時，其中點之位移爲 h ，並由此釋放之，求任意時間 $t > 0$ 之位移。

答 $Y(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}$

8.27 (a) 解

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$
$$Y_x(0,t) = A\sin\omega t,\quad Y(x,0) = 0,\quad Y_t(x,0) = 0$$

(b) 本題之物理意義爲何？

答 (a) $Y(x,t) = \begin{cases}\frac{Aa}{\omega}\{\cos\omega(t - x/a) - 1\} & 若\ t > x/a \\ 0 & 若\ t \leqq x/a\end{cases}$

横樑之振動

8.28 一横樑長爲 l ，在端點 $x = 0$ 爲固定端，而在 $x = l$ 則爲自由端。假設在端點 $x = l$ 突然施以一外力，使其縱向位移爲 α ，並由此釋放之，證明在任意時間 t 時，任意點 x 之位移爲

$$Y(x,t) = \frac{\alpha x}{l} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}$$

8.29 一横樑在其端點 $x = 0$ 及 $x = l$ 均爲鉸支承。在 $t = 0$ 時，此横樑受到一衝擊，使得其横向速度爲 $V_0 \sin\pi x/l$ 。求其後任意時間任意點之横向位移。

8.30 若横向速度改爲 $V_0 x(l - x)$ ，重做 29 題。

8.31 一横樑長爲 l ，其兩端均爲鉸支承。證明其横向振盪之自由頻率爲

$$f_n = \frac{n^2\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{EIg}{\rho}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

8.32 一半無限長之彈性橫樑，順著端點以 $-v_0$ 之速度移動。若一端突然使之靜止，而另一端仍為自由端，(a)根據此題，解釋下列各項之意義，(b)解此邊界值問題。

$$Y_{tt}(x,t) = a^2 Y_{xx}(x,t) \qquad x>0,\ t>0$$

$$Y(x,0)=0, \quad Y_t(x,0) = -v_0, \quad Y(0,t)=0, \quad \lim_{x\to\infty} Y_x(x,t) = 0$$

答 (b) $Y(x,t) = \begin{cases} -v_0 x/a & , \ t > x/a \\ -v_0 t & , \ t \leqq x/a \end{cases}$

傳輸線

8.33 假設在一半無限大的傳輸線內，其單位長度之電感及電導均可省略，且最初之電壓及電流均為零。在 $t=0$ 時，一固定電壓 E_0 加於發送端 $x=0$ 處，

(a) 證明在任意時間 $t>0$ 時，任意點之電壓為

$$E(x,t) = E_0 \operatorname{erfc}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})$$

(b) 證明相對於上式之電流為

$$I(x,t) = \frac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{C}{R}}\, t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t}$$

8.34 在 33 題中，證明在任一特定時間 t，電流之最大值發生於距發送端 $\sqrt{2t/RC}$ 處。

8.35 在一半無限大之傳輸線內，其單位長度之電阻及電導均可省略，且最初之電壓及電流均為零。在 $t=0$ 時，在發送端 $x=0$ 加上一電壓 $E_0(t)$

(a) 證明在任意位置 $x>0$ 之電壓為

$$E(x,t) = \begin{cases} E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

(b) 證明相對於上式之電流為

$$I(x,t) = \begin{cases} \sqrt{C/L}\, E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

8.36 假設在 35 題中的傳輸線中，存在下列關係式 $R/L = G/C$，證明電壓為

$$E(x,t) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{RG}}\, E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

和 35 題之結論比較之。又，本題之電流為何？

8.37 一傳輸線之發送端為 $x=0$，接收端為 $x=l$，且此傳輸線之電阻及電導均可省略。若在發送端加上固定電壓 E_0，而在接收端為開路（電流為零），假設最初之電壓及電

流均爲零，求證在任意時間 $t>0$ 時，任意點 x 的電壓及電流爲

$$E(x,t) = \frac{E_0 \cosh\sqrt{L/C}\,(l-x)}{\cosh\sqrt{L/C}\,l}$$

$$I(x,t) = \frac{E_0\sqrt{L/C}\,\sinh\sqrt{L/C}\,(l-x)}{\cosh\sqrt{L/C}}$$

(b) 在上式中，電壓及電流均和 t 無關，這代表什麼意義？

8.38 (a) 若在 37 題中，電阻和電容可省略，但電感及電導不可省略，證明

$$E(x,t) = E_0\left\{1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2l\sqrt{LC}}\right\}$$

(b) 和上式對應之電流爲何？討論以上所得級數之收斂性，並解釋其意義。

其他各類問題

8.39 (a) 解邊界值問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x \qquad 0<x<1,\ t>0$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = 0, \quad U(x,0) = x-x^2$$

(b) (a)之問題的物理意義爲何？

答 $U(x,t) = x(1-x) - \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3}\right)\sin n\pi x$ 或 $U(x,t) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3}\sin n\pi x$

8.40 若已知條件 $U(0,t)=0$ 改爲 $U_x(0,t)=0$，試重做 39 題。

答
$$U(x,t) = \frac{5}{3} - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} - \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}}{(2n-1)^4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

8.41 一物質介於 $0<x<l$，且最初之溫度爲零。在平面 $x=0$ 之溫度爲 $U(0,t)=G(t)$，$t>0$，而在 $x=l$ 之溫度則保持爲零度。證明在任意時間 t 時，任意點 x 之溫度爲

$$U(x,t) = \frac{2\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\int_0^t e^{-n^2\pi^2 u/l^2}G(t-u)\,du\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

8.42 若在 $x=l$ 處絕熱，試重做 41 題。

8.43 證明在解包含方程式 $\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 的邊界值問題時，相當於先解方程式 $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，再以

kt 取代答案中的 t ，即爲原式之解。

8.44 一物質介於 $0<x<l$ ，其端點之溫度均爲零，且最初之溫度爲 $F(x)$ 證明在任意時間 t ，任意點 x 的溫度爲

$$U(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2\pi^2 t/l^2} \sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l F(u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du$$

8.45 求一有界解滿足下式

$$x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xe^{-y} \qquad 0<x<1,\ y>0$$

$\Phi(x,0) = x,\ 0<x<1$ 　　　　$\Phi(x,y) = xe^{-y}(1+y)$

8.46 一細繩拉緊後固定於 $x=0$ 及 $x=l$ ，並將其中點向下拉，使其位移爲 D，然後釋放之。試求在任意時間 t 時，任意點 x 偏移平衡點之位移爲何？

答　$Y(x,t) = \dfrac{8D}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$

8.47 若在一傳輸線問題中，其單位長度之電感及電導均可省略，試證此問題相當於熱傳導問題。

8.48 解邊界值問題

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + x\frac{\partial Y}{\partial x} + Y = x \qquad x>0,\ t>0$$

其中 $Y(0,t)=0,\ Y(x,0)=0.$ 　答　$Y(x,t) = \frac{1}{2}x(1-e^{-2t})$

8.49 證明在解包含方程式 $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ 之邊界值問題時，相當於先解方程式 $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ，再以 at 取代答案中的 t ，即爲原式之解。

8.50 若在一傳輸線問題中，其電阻及電導均可省略，試證此問題相當於繩之振動問題。

8.51 一細繩拉緊後固定於 $x=0$ 及 $x=l$ 。在端點 $x=0$ 受到外力，形成位移 $Y(0,t)=F(t)$ ，其中 $F(t)$ 爲已知的時間函數，而在另一端點 $x=l$ 則固定動。求其橫位移。

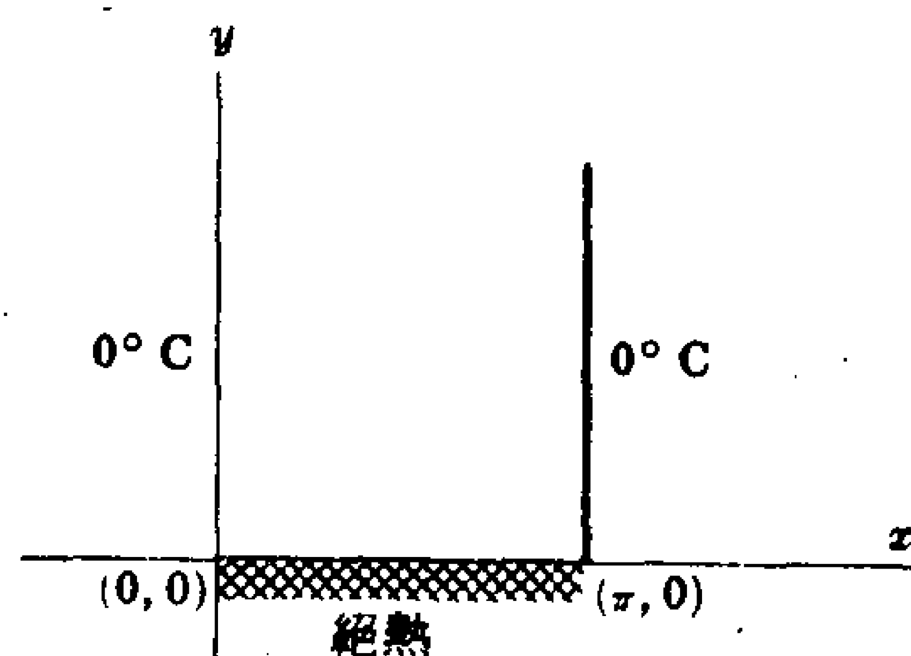


圖 8-14

8.52 一半無限大之平板，寬度爲 π（見圖 8-14），其表面均絕熱。在半無限大邊線之溫度

保持在0°C，而在有限大邊線爲絕熱。若最初之溫度爲100°C，求任意時間任意點之溫度。

8.53 一物質介於 $0<x<l$，其最初溫度爲 U_0，而在端點 $x=0$ 及 $x=l$ 則保持爲零度。證明在任意時間 t 時，任意點 x 之溫度爲

$$U(x,t) = U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{\operatorname{erf}\left(\frac{nl-x}{2\sqrt{kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{nl+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right\}$$

8.54 一橫樑在其端點 $x=0$ 及 $x=l$ 均爲鉸支承。在 $t=0$ 時，一集中之橫負載大小爲 w，突然施於其中點，證明在其後任意時間 $t>0$ 時，橫樑上任意點 x 之橫位移爲

$$Y(x,t) = \frac{wx}{12EI}\left(\tfrac{3}{4}l^2 - x^2\right) - \frac{2wl^3}{\pi^4 EI}\left\{\frac{\sin \pi x/l}{1^4} + \frac{\sin 3\pi x/l}{3^4} + \frac{\sin 5\pi x/l}{5^4} + \cdots\right\}$$

其中 $0<x<l/2$。$l/2<x<l$ 之位移可由對稱性而得。

8.55 證明邊界值問題

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$U(0,t) = U_1, \qquad U(l,t) = U_2, \qquad U(x,0) = 0$$

之解爲

$$U(x,t) = \frac{U_1 \sinh \alpha(l-x) + U_2 \sinh \alpha x}{\sinh \alpha l} + \frac{2\pi}{l^2} e^{-\alpha^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, e^{-n^2\pi^2 t/l^2}\,(U_2 \cos n\pi - U_1)}{\alpha^2 + n^2\pi^2/l^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

8.56 證明55 題可解釋爲熱傳導問題，即一棒長 l，向其週圍散發熱量之問題。

8.57 一橫向力 $F(x)=x(\pi-x)$ 施於兩端 $x=0$ 及 $x=\pi$ 均爲鉸支承的橫樑，若最初之橫位移及速度均爲零，求其後任意時間 t 之橫位移。

8.58 在一半無限長之傳輸線中，假設其每單位長度之電感及電導均可省略，且在其發送端 $x=0$ 加上一電壓 $E(0,t)=E_0 \cos \omega t$；$t>0$，若最初之電壓及電流均爲零，(a)證明在一長時間之後，在任意點 x 之電壓爲

$$E(x,t) = E_0\, e^{-\sqrt{\omega RC/2}\,x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\omega RC/2}\,x\right)$$

及(b)證明相對上式之電流爲

$$I(x,t) = E_0 \sqrt{\omega C/R}\, e^{-\sqrt{\omega RC/2}} \cos\left(\omega t - \sqrt{\omega RC/2}\,x - \pi/4\right)$$

8.59 一半無限長之細繩固定於端點 $x=0$。且最初靜止於 x 軸。在 $t=0$ 時，繩上任意點 x 所具有的速度爲 $F(x)$，$x>0$，求任意時間 $t>0$ 時，任意點 x 之位移。

8.60 一集中橫向力 $F=F_0 \sin \omega t$，$t>0$ 施於一橫樑之中點，而此橫樑之兩端點 $x=0$ 及

$x=l$ 均爲鉸支承。證明其橫位移爲

$$Y(x,t) = \frac{bF_0 \sin \omega t}{4EI}\sqrt{\frac{b}{\omega}}\left\{\frac{\sin x\sqrt{\omega/b}}{\cos l\sqrt{\omega}/2\sqrt{b}} - \frac{\sinh x\sqrt{\omega/b}}{\cosh l\sqrt{\omega}/2\sqrt{b}}\right\}$$

$$- \frac{2bF_0 l}{\pi^2 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi/2}{n^2(\omega^2 - b^2n^4\pi^4/l^4)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2}$$

其中 $0 < x < l/2$。$l/l < x < l$ 之位移可由對稱性而得。討論 $\omega = bn^2\pi^2/l^2$，$n=1,2,3\cdots$之物理意義。

8.61 在圖 8-15 的方塊中，若其表面均絕熱，且四邊的溫度均保持在0°C，求此方塊的穩態（最終）溫度。

圖

$$U(x,y) = \frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x \sinh(2n-1)\pi(1-y)}{(2n-1)\sinh(2n-1)\pi}$$

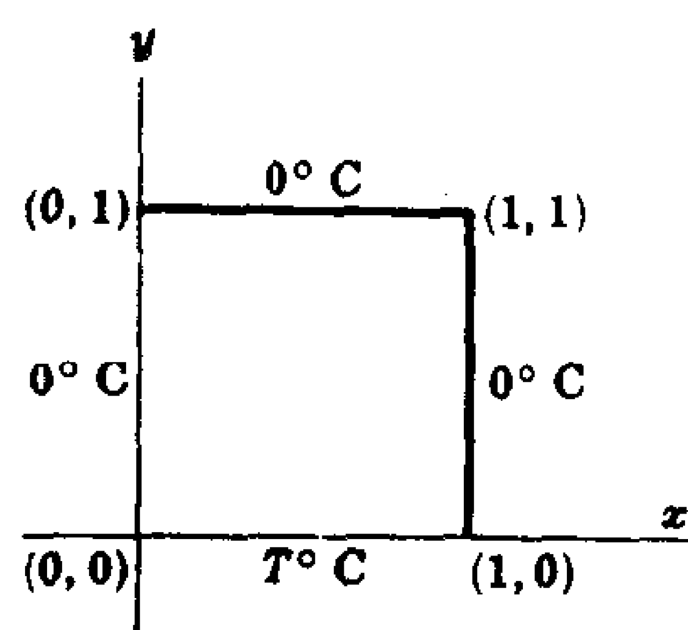


圖 8-15

8.62 若四邊的溫度分別保持爲 T_1，T_2，T_3，T_4，試重做 61 題。

8.63 假設在 62 題中，最初之溫度爲 0°C，求其後任意時間時，方塊內任意點之溫度爲何？

8.64 一橫樑長 l，端點 $x=l$ 爲固定端。$t=0$ 時，端點 $x=0$ 之縱位移爲 D，並由此釋放之。證明其後任意時間 $t>0$ 時，任意點 x 之縱位移爲

$$Y(x,t) = D\left\{u(t-x/a) - u\left(t-\frac{2l-x}{a}\right) + u\left(t-\frac{2l+x}{a}\right) - \cdots\right\}$$

其中 u 爲黑佛塞單位階梯函數。以圖形討論上式。

8.65 兩半無限大之導熱物質，$x<0$ 及 $x>0$（見圖 8-16），具有固定之熱傳導係數及擴散係數，分別是 K_1，k_1，K_2，k_2。最初此兩物質之之溫度均爲 U_1 及 U_2，證明在任意時間 t 時，任意位置 $x>0$ 之溫度爲

$$U(x,t) = U_1 + \frac{U_2-U_1}{1+\alpha}\left\{1 + \alpha\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}\right)\right\}$$

其中 $\alpha = K_1\sqrt{k_2}/K_2\sqrt{k_1}$

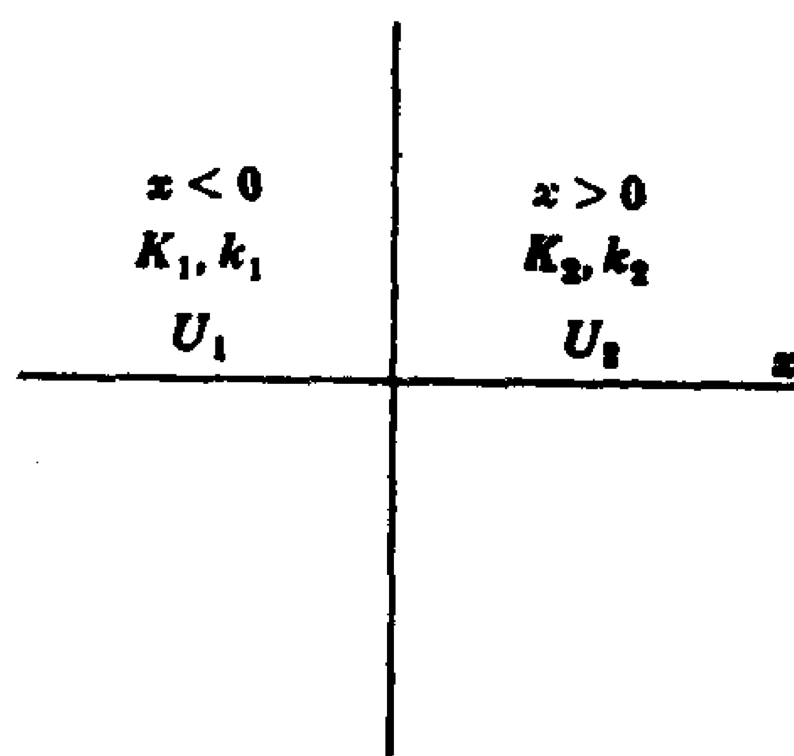


圖 8-16

提示：熱傳導方程式爲 $\frac{\partial U}{\partial t} = k_1\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$　$x<0$

及 $\frac{\partial U}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x > 0$ 且我們已知 $\lim_{x \to 0-} U(x,t) = \lim_{x \to 0+} U(x,t)$ 及 $\lim_{x \to 0-} K_1 U_x(x,t) = \lim_{x \to 0+} K_2 U_x(x,t)$

8.67 一無限長之圓柱體，半徑爲 1，最初之溫度爲零。若一固定熱流 A 施於圓柱體之凸面（即側面），證明在任何時間 t 時，離中心軸爲 r 之處的溫度

$$U(r,t) = \frac{A}{4k}\{1 - 8kt - 2r^2\} + \frac{2A}{k}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n^2 t} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}$$

其中 λ_n 爲 $J_0(\lambda) = 0$ 的正根。

8.68 一圓柱體之半徑及高均爲1，在圓形面（上下底之平面）之溫度保持爲零度，而在凸面（側面）之溫度保持爲 U_0，假設此圓柱體之中心軸和 z 軸重合，證明離中心軸 r 處，且離一底 z 處之穩態溫度爲

$$U(r,z) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi z}{2n-1} \frac{I_0\{(2n-1)\pi r\}}{I_0\{(2n-1)\pi\}}$$

8.69 (a) 解下列邊界值問題

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$Y(0,t) = 0,\quad Y(l,t) = 0,\quad Y(x,0) = 0,\quad Y_t(x,0) = 0,\quad Y_{xx}(l,t) = 0,\quad EI\,Y_{xx}(0,t) = P_0 \sin \omega t$$

(b) 解釋(a)之問題之物理意義。

答 (a)

$$Y(x,t) = \frac{bP_0 \sin \omega t}{2EI\omega}\left\{\frac{\sinh (l-x)\sqrt{\omega/b}}{\sinh l\sqrt{\omega/b}} - \frac{\sin (l-x)\sqrt{\omega/b}}{\sin l\sqrt{\omega/b}}\right\} + \frac{2\omega P_0 b}{\pi EI}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x/l \sin bn^2\pi^2 t/l^2}{n(\omega^2 - b^2 n^4 \pi^4/l^4)}$$

8.70 一單位電感可忽略之半無限長傳輸線，最初之電壓及電流均爲零。在 $t = 0$ 時，於發送端加上一固定電壓 E_0，證明在任意時間 $t > 0$ 時，任意點 $x > 0$ 之電壓爲

$$E(x,t) = \tfrac{1}{2}E_0\left\{e^{-x\sqrt{GR}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} - \tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) - e^{x\sqrt{GR}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)\right\} - E_0 \cosh x\sqrt{GR}$$

其相對之電流爲何？

附錄 A

拉卜拉士變換的一般性質表

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$a f_1(s) + b f_2(s)$	$a F_1(t) + b F_2(t)$
2.	$f(s/a)$	$a F(at)$
3.	$f(s-a)$	$e^{at} F(t)$
4.	$e^{-as} f(s)$	$u(t-a) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
5.	$s f(s) - F(0)$	$F'(t)$
6.	$s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$	$F''(t)$
7.	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
8.	$f'(s)$	$-t F(t)$
9.	$f''(s)$	$t^2 F(t)$
10.	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
11.	$\dfrac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u)\, du$
12.	$\dfrac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t \cdots \int_0^t F(u)\, du^n = \int_0^t \dfrac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u)\, du$

	$f(s)$	$F(t)$
13.	$f(s)\,g(s)$	$\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du$
14.	$\int_s^\infty f(u)\,du$	$\frac{F(t)}{t}$
15.	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)\,du$	$F(t) = F(t+T)$
16.	$\frac{f(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}F(u)\,du$
17.	$\frac{1}{s}f(1/s)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
18.	$\frac{1}{s^{n+1}}f(1/s)$	$t^{n/2}\int_0^\infty u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
19.	$\frac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})\,F(u)\,du$
20.	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-s^2/4u}f(u)\,du$	$F(t^2)$
21.	$\frac{f(\ln s)}{s\ln s}$	$\int_0^\infty \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du$
22.	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ = 次數小於 n 的多項式 $Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n)$ 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 均不相同。	$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$

附 錄 B

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
4.	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
5.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
6.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
7.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
8.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
9.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
10.	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$
11.	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
12.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
13.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
14.	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\sinh at}{a}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
15.	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
16.	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
17.	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
18.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$
19.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\sin at}{2a}$
20.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at + at\cos at}{2a}$
21.	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$
22.	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
23.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \sinh at}{2a^3}$
24.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t\sinh at}{2a}$
25.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\sinh at + at\cosh at}{2a}$
26.	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at\sinh at$
27.	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
28.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at}{8a^5}$
29.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t\sin at - at^2\cos at}{8a^3}$
30.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\sin at - at\cos at}{8a^3}$
31.	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t\sin at + at^2\cos at}{8a}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
32.	$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at + 5at\cos at}{8a}$
33.	$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at - 7at\sin at}{8}$
34.	$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\sin at}{2a}$
35.	$\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos at$
36.	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos at$
37.	$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\sin at}{24a}$
38.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\sinh at - 3at\cosh at}{8a^5}$
39.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at - t\sinh at}{8a^3}$
40.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh at + (a^2t^2-1)\sinh at}{8a^3}$
41.	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\sinh at + at^2\cosh at}{8a}$
42.	$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\sinh at + 5at\cosh at}{8a}$
43.	$\dfrac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at + 7at\sinh at}{8}$
44.	$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\sinh at}{2a}$
45.	$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$
46.	$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$
47.	$\dfrac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\sinh at}{24a}$
48.	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}at}{2} - \cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
49.	$\frac{s}{s^3+a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}\,at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
50.	$\frac{s^2}{s^3+a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
51.	$\frac{1}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}\,at}{2}\right\}$
52.	$\frac{s}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}\,at}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
53.	$\frac{s^2}{s^3-a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\frac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
54.	$\frac{1}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{4a^3}(\sin at\cosh at-\cos at\sinh at)$
55.	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{\sin at\sinh at}{2a^2}$
56.	$\frac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a}(\sin at\cosh at+\cos at\sinh at)$
57.	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
58.	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$
59.	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
60.	$\frac{s^2}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a}(\sinh at+\sin at)$
61.	$\frac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at+\cos at)$
62.	$\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
63.	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
64.	$\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-a)}$	$\frac{e^{at}\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
65.	$\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-b\,e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
66.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
67.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
68.	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}$ $\quad n>-1$	$a^n J_n(at)$
69.	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}}$ $\quad n>-1$	$a^n I_n(at)$
70.	$\dfrac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
71.	$\dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t>b \\ 0 & t<b \end{cases}$
72.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tJ_1(at)}{a}$
73.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$tJ_0(at)$
74.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$J_0(at)-atJ_1(at)$
75.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tI_1(at)}{a}$
76.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$tI_0(at)$
77.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$I_0(at)+atI_1(at)$
78.	$\dfrac{1}{s(e^s-1)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ 參見第141條。	$F(t)=n,\quad n\leqq t<n+1,\quad n=0,1,2,\ldots$
79.	$\dfrac{1}{s(e^s-r)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t)=\sum_{k=1}^{[t]} r^k$ 其中 $[t]$ = 小於或等於 t 的最大整數
80.	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)}=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ 參見第143條。	$F(t)=r^n,\quad n\leqq t<n+1,\quad n=0,1,2,\ldots$
81.	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
82.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\dfrac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
83.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
84.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
85.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$
86.	$\dfrac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$
87.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$
88.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
89.	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}\, a^{2n+1}} \displaystyle\int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u})\, du$
90.	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
91.	$\dfrac{\ln[(s^2+a^2)/a^2]}{2s}$	$\operatorname{Ci}(at)$
92.	$\dfrac{\ln[(s+a)/a]}{s}$	$\operatorname{Ei}(at)$
93.	$-\dfrac{(\gamma + \ln s)}{s}$ γ = 奧衣勒常數 = .5772156 ⋯	$\ln t$
94.	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\dfrac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$
95.	$\dfrac{\pi^2}{6s} + \dfrac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ γ = 奧衣勒常數 = .5772156 ⋯	$\ln^2 t$
96.	$\dfrac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$ γ = 奧衣勒常數 = .5772156 ⋯
97.	$\dfrac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ γ = 奧衣勒常數 = .5772156 ⋯

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
98.	$\dfrac{\Gamma'(n+1)-\Gamma(n+1)\ln s}{s^{n+1}}$ $\quad n>-1$	$t^n \ln t$
99.	$\tan^{-1}(a/s)$	$\dfrac{\sin at}{t}$
100.	$\dfrac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$	$\mathrm{Si}\,(at)$
101.	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}\operatorname{erfc}(\sqrt{a/s})$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
102.	$e^{s^2/4a^2}\operatorname{erfc}(s/2a)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t^2}$
103.	$\dfrac{e^{s^2/4a^2}\operatorname{erfc}(s/2a)}{s}$	$\operatorname{erf}(at)$
104.	$\dfrac{e^{as}\operatorname{erfc}\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
105.	$e^{as}\,\mathrm{Ei}\,(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
106.	$\dfrac{1}{a}\left[\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(as)\right\}-\sin as\,\mathrm{Ci}\,(as)\right]$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
107.	$\sin as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(as)\right\}+\cos as\,\mathrm{Ci}\,(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
108.	$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(as)\right\}-\sin as\,\mathrm{Ci}\,(as)}{s}$	$\tan^{-1}(t/a)$
109.	$\dfrac{\sin as\left\{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(as)\right\}+\cos as\,\mathrm{Ci}\,(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
110.	$\left[\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(as)\right]^2+\mathrm{Ci}^2(as)$	$\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
111.	0	$\mathcal{N}(t)$
112.	1	$\delta(t)$
113.	e^{-as}	$\delta(t-a)$
114.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ 參見第139條。	$\mathcal{U}(t-a)$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
115.	$\dfrac{\sinh sx}{s \sinh sa}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \sin \dfrac{n\pi x}{a} \cos \dfrac{n\pi t}{a}$
116.	$\dfrac{\sinh sx}{s \cosh sa}$	$\dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
117.	$\dfrac{\cosh sx}{s \sinh sa}$	$\dfrac{t}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi t}{a}$
118.	$\dfrac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
119.	$\dfrac{\sinh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi t}{a}$
120.	$\dfrac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$	$x + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
121.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\dfrac{t^2}{2a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \dfrac{n\pi t}{a}\right)$
122.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
123.	$\dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
124.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
125.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
126.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
127.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a}$
128.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
129.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
130.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2 \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-n^2\pi^2 t/a^2}) \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
131.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2}(x^2 - a^2) + t - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
132.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s\,J_0(ia\sqrt{s})}$	$1-2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ 其中 λ_1，λ_2，…爲 $J_0(\lambda)=0$ 的正根
133.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2\,J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{1}{4}(x^2-a^2)+t+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ 其中 λ_1，λ_2，…爲 $J_0(\lambda)=0$ 的正根
134.	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	三角波函數
135.	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	方波函數
136.	$\dfrac{\pi a}{a^2s^2+\pi^2}\coth\left(\dfrac{as}{2}\right)$	整流正弦波函數
137.	$\dfrac{\pi a}{(a^2s^2+\pi^2)(1-e^{-as})}$	半波整流正弦波函數
138.	$\dfrac{1}{as^2}-\dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	鋸齒波函數

拉卜拉士變換表

	$f(s)$	$F(t)$
139.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ 參見第114條	黑佛塞單位函數 $u(t-a)$
140.	$\dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	脈波函數
141.	$\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}$ 參見第78條	階梯函數
142.	$\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t)=n^2,\quad n \leqq t < n+1,\ n=0,1,2,\ldots$
143.	$\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ 參見第80條	$F(t)=r^n,\quad n \leqq t < n+1,\ n=0,1,2,\ldots$
144.	$\dfrac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t)=\begin{cases}\sin(\pi t/a) & 0 \leqq t \leqq a \\ 0 & t > a\end{cases}$

附　錄　C

特殊函數表

1.（伽瑪函數）

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\, du, \quad n > 0$$

2.（貝他函數）

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\, du = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m, n > 0$$

3.（貝色函數）

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

4.（修正之貝色函數）

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\}$$

5.（誤差函數）

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\, du$$

6.（餘誤差函數）

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2}\, du$$

7.（指數積分）

$$\operatorname{Ei}(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

8.（正弦積分）

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du$$

9.（餘弦積分）

$$\operatorname{Ci}(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\, du$$

10.（福來乃耳正弦積分）

$$S(t) = \int_0^t \sin u^2\, du$$

11.（福來乃耳餘弦積分）

$$C(t) = \int_0^t \cos u^2\, du$$

12.（拉各耳多項式）

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

索　　引

A

B

C

D

J

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

W

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝拉普拉斯（变换）原理及题解
作者＝（）施皮格尔（Ｓｐｉｅｇｅｌ，Ｍ．Ｒ．）著
页数＝３１８
ＳＳ号＝１００６９７２６
出版日期＝